Raiz cuadrada de un número complejo en forma binómica

$Z = a + bi$

a y b reales

Calcula $\sqrt{-3+4i} = a + bi$

$$-3+4i = (a+bi)^2$$

$$-3+4i = a^2 + 2 \cdot a \cdot bi + (bi)^2$$

$$\underbrace{-3}+4i = \underbrace{a^2} + 2abi \underbrace{\overset{-}{\cancel{+}}\, b^2 \cancel{i^2}}$$

Igualo las partes reales e imaginarias

$$\begin{cases} -3 = a^2 - b^2 \\ 4 = 2ab \Rightarrow \text{despejo } a \text{ ó } b \end{cases}$$

$$a = \frac{2}{b}$$

Reemplazo en la otra ecuación

$$-3 = \left(\frac{2}{b}\right)^2 - b^2 \quad \text{resuelvo}$$

$$-3 = \frac{4}{b^2} - b^2$$

$$-3 + b^2 = \frac{4}{b^2} \Rightarrow (-3+b^2) \cdot b^2 = 4$$

$$-3b^2 + b^4 = 4 \quad \text{Cambio } b^2 = t$$

$$-3t + t^2 = 4$$

$$t^2 - 3t - 4 = 0 \quad \begin{cases} t_1 = 4 \\ t_2 = -1 \end{cases}$$

$$\text{Si } b^2 = t \Rightarrow b^2 = 4 \quad \text{o} \quad b^2 = -1$$

$$|b| = \sqrt{4} \quad \text{o} \quad \underbrace{|b| = \sqrt{-1}}_{\text{no es posible } b \text{ es real}}$$

$$b_1 = 2 \qquad b_2 = -2$$

Si $b_1 = 2 \Rightarrow a_1 = \frac{2}{b_1} = \frac{2}{2} \Rightarrow a_1 = 1$

Si $b_2 = -2 \Rightarrow a_2 = \frac{2}{b_2} = \frac{2}{-2} \Rightarrow a_2 = -1$

armo las respuestas $z_1 = a_1 + b_1 i \Rightarrow z_1 = 1 + 2i$

$z_2 = a_2 + b_2 i \Rightarrow z_2 = -1 - 2i$

- las raices cuadradas tienen casi siempre dos respuestas
- Para saber si es correcto debo verificar elevando al cuadrado las respuestas y debe darme $(-3+4i)$

$\sqrt{-3+4i} = 1+2i$ y $\sqrt{-3+4i} = -1-2i$

Resuelve: $\sqrt{-8-6i} = a+bi$ → a y b son reales

$$-8-6i = (a+bi)^2$$

$$-8-6i = a^2+2abi+b^2\cdot\cancel{i^2}$$

Igualo las partes reales e imaginarias

$$\begin{cases} -8 = a^2-b^2 \\ -6 = 2ab \Rightarrow b = \dfrac{-3}{a} \end{cases}$$

Reemplazo en la otra ecuación

$$-8 = a^2-\left(\frac{-3}{a}\right)^2$$

$$-8-a^2 = -\frac{9}{a^2}$$

$$\frac{9}{a^2} = 8+a^2$$

$$9 = (8+a^2)\,a^2$$

$$9-8a^2-a^4 = 0$$

$m = a^2$

$9-8m-m^2=0$ ⟨ $m_1=-9$, $m_2=1$

$a^2=-9$ o $a^2=1$

$\cancel{|a| = \sqrt{-9}}$

$\cancel{|a| = 3i}$

~~no puede ser a un n° complejo~~

$|a| = \sqrt{1}$

$a_1 = 1$ $\quad a_2 = -1$

Si $a_1 = 1 \Rightarrow b_1 = \frac{-3}{1} = -3 \Rightarrow z_1 = 1-3i$

Si $a_2 = -1 \Rightarrow b_2 = \frac{-3}{-1} = 3 \Rightarrow z_2 = -1+3i$

verificamos una respuesta

$$(-1+3i)^2 = (-1)^2+2\cdot(-1)(3i)+(3i)^2$$

$$= 1-6i+9\cancel{i^2} = -8-6i \ \checkmark$$