Matemáticas

Rodolfo Esteve / Maribel Deusa / Pascual Montesinos
Ernesto Veres / Antonio J. Ramírez

ECIR EDITORIAL

4 eso

Matemáticas

Este libro corresponde al cuarto curso opción B de la Educación Secundaria Obligatoria, área de Matemáticas y forma parte de los materiales curriculares de Editorial ECIR.

Fotografía. Archivo ECIR/FOTOLIA/ISTOCK PHOTO
Ilustración Portada: Tacoma Narrows Bridge, Washington

Ilustraciones. Salvador Ferrando/Diseño gráfico ECIR/Kino Garrido
Diseño e ilustración cubierta. Valverde Iborra

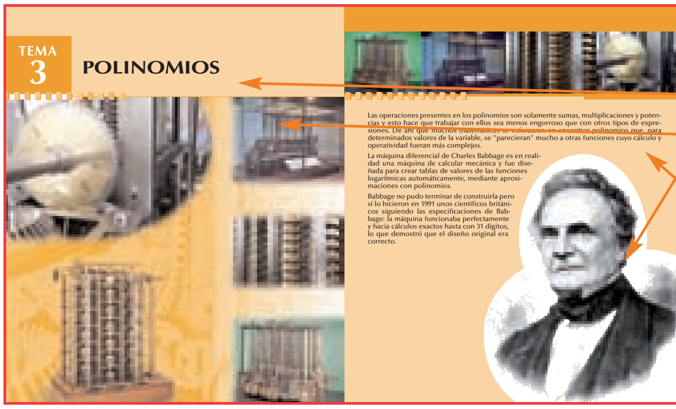
Diseño de interior. Diseño gráfico ECIR
Edición. Editorial ECIR
Impresión. Industrias gráficas ECIR (IGE)

Depósito legal: V-3136-2008
I.S.B.N.: 978-84-9826-401-2
Impreso en España – *Printed in Spain*

ECIR EDITORIAL

Villa de Madrid, 60 - 46988 - P. I. Fuente del Jarro - PATERNA (Valencia)
Tels: 96 132 36 25 - 96 132 36 55 - Móvil: 677 431 115 - Fax: 96 132 36 05
E-mail: ecir@ecir.com - http://www.ecir.com

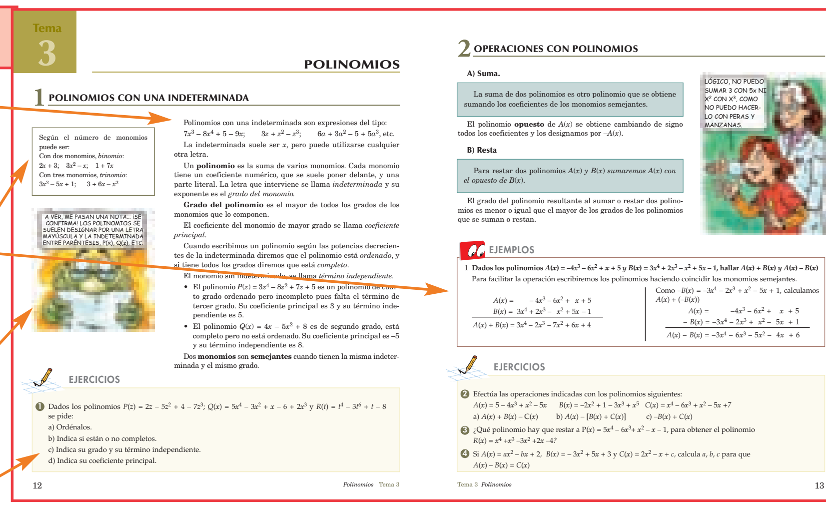
Descubre tu libro



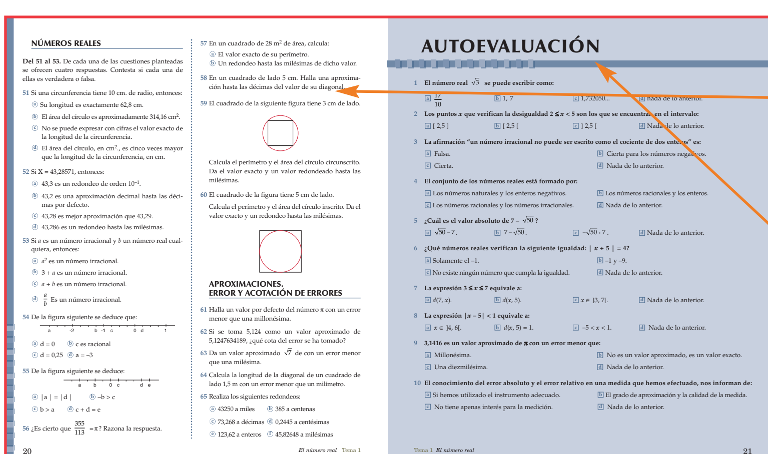
Presentación de la Unidad

- Título de la unidad.
- Fotografías relativas al tema que ilustran el contenido de la unidad.
- Algunas ideas relacionadas con el tema que presentan ejemplos pasados, presentes o futuros de aplicación de sus contenidos.

Desarrollo de la Unidad



- Los epígrafes se estructuran en una exposición teórica donde se destacan claramente las definiciones de términos matemáticos y ejemplos desarrollados de su aplicación.
- Fácil identificación de los ejemplos gracias al icono que los representa.
- En los márgenes de las páginas se inserta información adicional que contribuye a la comprensión de la teoría.
- En ocasiones la información más relevante queda resaltada mediante dibujos que hacen hincapié en su importancia.
- Al final de cada epígrafe suelen proponerse varios ejercicios. De este modo puede practicarse lo aprendido antes de pasar a los conceptos siguientes.



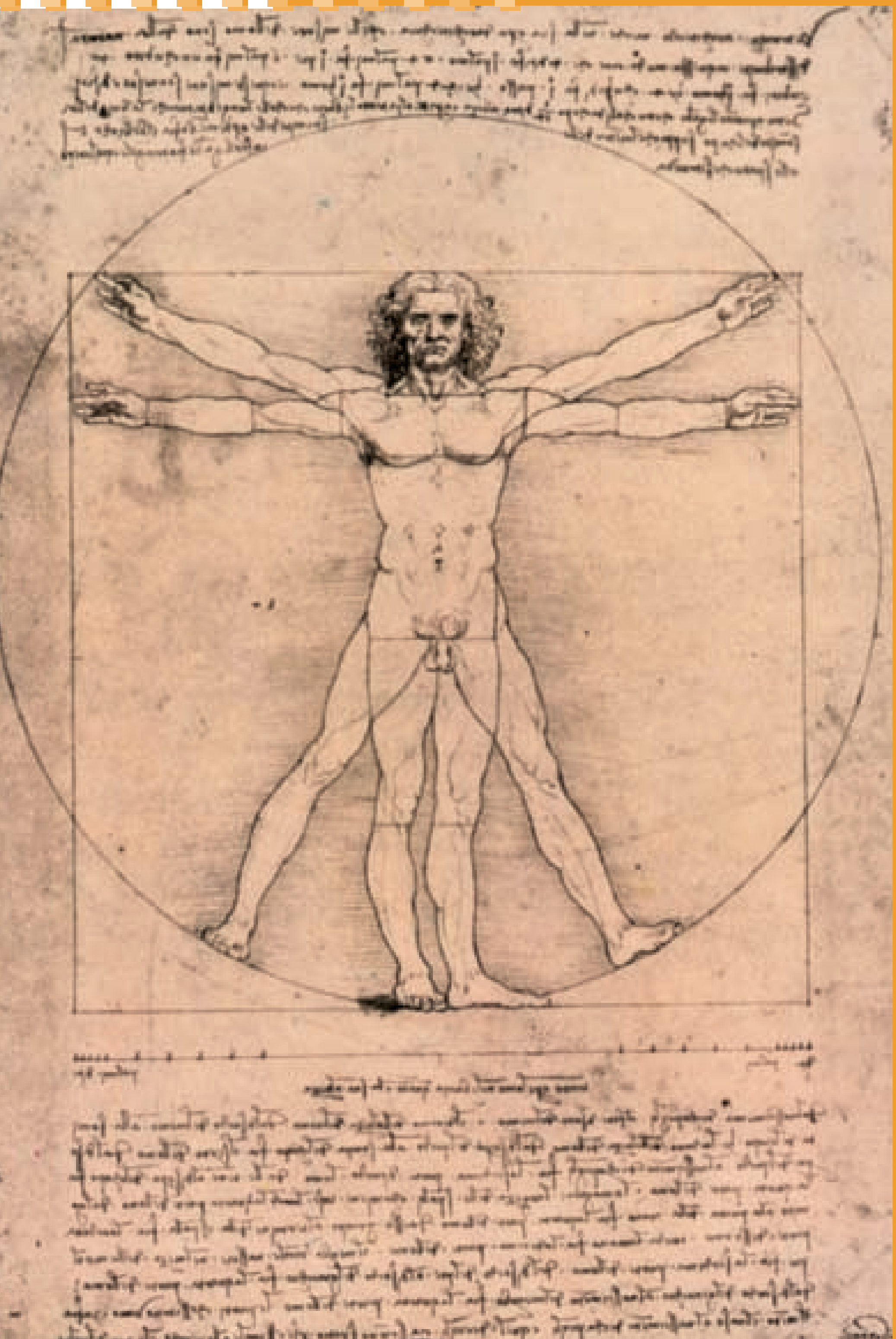
Cierre de la unidad

- En las últimas páginas de cada tema se incluye un conjunto de ejercicios para poder trabajar los conceptos desarrollados en la unidad.
- El tema concluye con una autoevaluación tipo test que sirve para poner a prueba la asimilación de los contenidos estudiados. Al mismo tiempo permite trabajar la autonomía e iniciativa personales.

ÍNDICE

TEMA 1

EL NÚMERO REAL



El "Hombre de Vitruvio" lo realizó Leonardo da Vinci tomando como base los textos de Vitruvio, arquitecto romano del siglo I a.C., en los que trata las proporciones del cuerpo humano.

El centro del cuadrado está en los genitales y el del círculo en el ombligo. La relación entre el lado del cuadrado y el radio del círculo es la razón áurea o número de oro Φ, número irracional cuyo valor es:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618033989...$$

Hombre de Vitruvio (1490) que forma parte de la Galería de la Academia de Venecia.

$\pi \approx$ 3.14159265358979323846264338327950288419716
939937510582097494459230781640628620899862
803482534211706798214808651328230664709384460
95505822317253594081284811174502841027019385211
055596446229489549303819644288109756659334461284
75648233786783165271201909145648566923460348610454326
64821339360726024914127372458700660631558817488152092096282
925409171536436789259036001133053054882046652138414695194151
1609433057270365759591953092186117381932611793105118548074462379962749
5673518857527248912279381830119491298336733624406566430860213949463952
2473719070217986094370277053921717629317675238467481846766940513200056812714526356082
778577134275778960917363717872146844090122495343014654958537105079227968925892354201
99561121290219608640344181598136297747713099605187072113499999983729780499510597317328160963185950244594 55
3469083026425223082533446850352619311881710100031378387528865875332083814206171776691473035982534904 2
87554687311595628638823537875937519577818577805321712268066130019278766111959092164201989...

Los números irracionales desmontaban la teoría pitagórica de concepción del universo y por eso decidieron mantenerlos en secreto. Hipaso de Metaponto, discípulo de Pitágoras, es considerado como el descubridor de los irracionales.
Por su descubrimiento fue expulsado de la Escuela Pitagórica y sus antiguos compañeros exigieron una tumba con su nombre para darle a entender que, para ellos estaba muerto.

No obstante, la tradición atribuye el nombre del famoso número irracional π a las primeras letras de Pitágoras, su más acérrimo enemigo.

Tema 1

EL NÚMERO REAL

1 REVISIÓN DE OPERACIONES

La expresión $a + b \times c$ equivale a $a + (b \times c)$.

Si en la operación hay potencias, éstas se efectúan antes que las multiplicaciones y divisiones.

A) Prioridad de operaciones

Las operaciones combinadas ***sin paréntesis*** *se efectúan de izquierda a derecha, en el sentido de la escritura.* En estas operaciones, **las *multiplicaciones y divisiones tienen prioridad sobre las sumas y restas.***

En operaciones combinadas con paréntesis, éstos son los primeros que se realizan y, caso de estar encajados, se comienza la operación resolviendo los más interiores.

También puedes utilizar la **propiedad distributiva** de la adición respecto de la multiplicación: $\boldsymbol{a \times (b + c) = a \times b + a \times c}$.

La fracción $\frac{a}{b}$ representa el cociente de a entre b.

B) Las fracciones

Una fracción se escribe $\frac{a}{b}$ siendo a y b números enteros y b no nulo, a es el numerador y b el denominador.

Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes y se escribe $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si $a \cdot d = b \cdot c$.

Recuerda las operaciones con fracciones:

Suma o resta	*Multiplicación*	*División*
$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$ $\qquad$ $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d}$	$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

Es posible simplificar una fracción si existe un divisor común al numerador y denominador. Una fracción que no se puede simplificar y su denominador es positivo se llama *irreducible* o *canónica*.

EJEMPLOS

1 **Calcula los números siguientes:**

$A = -8 \times 4 + 9$; $B = 10 + 6 \times 8 - 48 : 3$; $C = 18 - (2 + 3 \times 5) - (6 - (5 - 8))$; $D = \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{5} \times \frac{15}{4}\right) : \frac{5}{6}$

$A = -8 \times 4 + 9 = -32 + 9 = -23$

$B = 10 + 6 \times 8 - 48 : 3 = 10 + 48 - 16 = 58 - 16 = 42$

$C = 18 - (2 + 3 \times 5) - (6 - (5 - 8)) = 18 - (2 + 15) - (6 - (-3)) = 18 - 17 - (6 + 3) = 18 - 17 - 9 = -8$

$$D = \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{5} \times \frac{15}{4}\right) : \frac{5}{6} = \left(\frac{8}{3} - \frac{15}{20}\right) : \frac{5}{6} = \left(\frac{8}{3} - \frac{3}{4}\right) : \frac{5}{6} = \left(\frac{32 - 9}{12}\right) : \frac{5}{6} = \frac{23}{12} : \frac{5}{6} = \frac{138}{60} = \frac{23}{10}$$

EJERCICIOS

1 Escribe los paréntesis imprescindibles para que las siguientes igualdades sean ciertas:

a) $4 \times 5 + 6 = 44$ b) $10 - 3 \times 2 = 14$ c) $7 - 15 \times 3 - 4 = 8$

d) $5 - 7 \times 9 = -18$ e) $15 - 8 \times 10 = -65$ f) $7 \times 9 - 9 = 0$

2 Halla el valor de A, B y C. Puedes ayudarte de la calculadora:

$A = (4{,}3 \times 1{,}8 + 3{,}2) \times 6{,}5 \times (8{,}3 - 4{,}4) - 2{,}6$

$B = [24 \times (13 - 2) + 16 \times (26 - 6 \times 15)] \times 20$

$C = (2{,}23 + 0{,}4 \times 6{,}52) \times [(2{,}8 - 7{,}24) \times 8{,}1 - 6{,}73]$

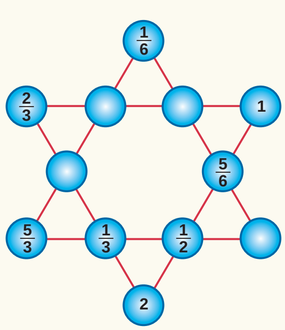
3 Expresa los valores de A y B como una fracción:

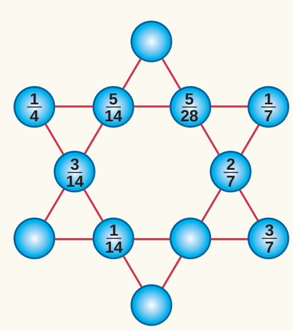
$A = \frac{3}{5} - \frac{1}{2} + \frac{2}{7} \times 5$ $B = \left(2 + \frac{3}{5} - \frac{1}{4}\right) : \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{5} + \frac{3}{4}\right)$

4 Calcula los números siguientes:

a) $\left(\frac{5}{8} - \frac{13}{16}\right)\left(3 - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{6}{5} - \frac{8}{15}\right)\left(\frac{3}{4} - 2\right)$ b) $\frac{5}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{3}{4}\right) + \frac{3}{5}\left(2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{6}\right)$

5 Completa las estrellas mágicas (la suma de las fracciones en cada línea es constante).





2 LOS NÚMEROS IRRACIONALES

Los números irracionales ya eran conocidos por los pitagóricos, aunque ellos mismos decidieron no divulgar su existencia.

El historiador Proclo escribió:

«Se dice que quienes han divulgado los números irracionales han perecido todos en un naufragio; por tanto, lo que no se pueda expresar con números ordinarios (las fracciones) debe ser absolutamente tenido en secreto».

Otro número irracional es el número π de valor aproximado 3,141592654..., que expresa la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro.

$$\boxed{\frac{\textit{Longitud de la circunferencia}}{\textit{diámetro de la circunferencia}} = \pi}$$

de aquí

$$\boxed{L = \pi \times d = 2\pi r}$$

Observa que operaciones con números irracionales pueden dar como resultado un número no irracional.

$$(3 + \pi) + (4 - \pi) = 7$$

Sabes que la fracción $\frac{a}{b}$ representa la división de a entre b. Si realizas esta división, el cociente es un número exacto o un número decimal que puede ser exacto o periódico.

Pero es fácil comprender que hay otros decimales que tienen infinitas cifras decimales y éstas no se repiten de forma periódica. Tal es el caso por ejemplo de los siguientes números:

0, 10203040506070…; 1,2345678910…; 4,1002003004005006007…

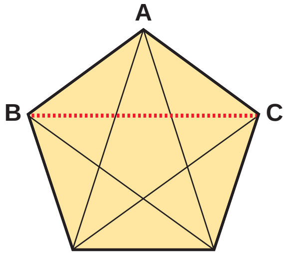
Estos números no son el resultado de la división de dos números enteros y reciben el nombre de **números irracionales**.

Un **número irracional** es un número con una parte decimal de infinitas cifras no periódicas. El conjunto de los números irracionales se denota **I**.

EL NÚMERO DE ORO

Uno de los primeros números irracionales de los que se tiene constancia es el **número de oro**, que se representa por Φ. Los griegos de la escuela de Pitágoras denominaron así a la relación entre la diagonal y el lado del pentágono regular.

Su valor exacto es $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y su expresión decimal es 1,618033989…

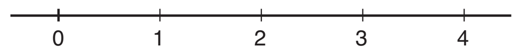


$$\frac{BC}{BA} = \Phi$$

Todas las raíces cuadradas de números enteros no cuadrados perfectos $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$, etc son números irracionales.

3 LOS NÚMEROS REALES: LA RECTA REAL

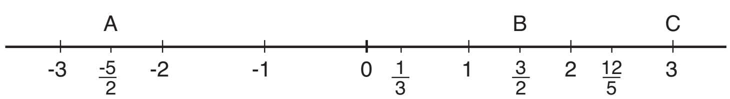
El conjunto de los **números naturales** se denota N = { 0, 1, 2, 3,...} y con ellos podemos graduar la *recta natural*:



El conjunto de los **números enteros** se denota **Z** = {..., –3, –2, –1, 0, 2, 3,...} y con ellos se ampliaba la recta natural y se formaba la *recta entera*:

Al número –3 se le asocia el punto A de la recta y se dice que el punto A tiene **abscisa** –3.

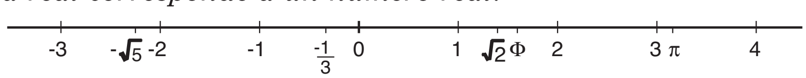
Las fracciones de números enteros $\frac{a}{b}$ con $b \neq 0$, formaban el conjunto de los **números racionales**, denotado **Q**. Los naturales, enteros, decimales exactos y periódicos son expresiones de números racionales. Con ellos completábamos la *recta racional*:



Una vez representados los números racionales, no debes pensar que la recta está «llena» pues en ella quedan muchos huecos que deberán ser ocupados por los **números irracionales**.

El conjunto formado por los números racionales y los irracionales se le llama conjunto de los **números reales** y se denota **R**.

Al representar los números reales en la recta, ésta se completa totalmente y constituye la **recta real**: *todo número real está representado por un punto de la recta y, recíprocamente, todo punto de la recta real corresponde a un número real*.

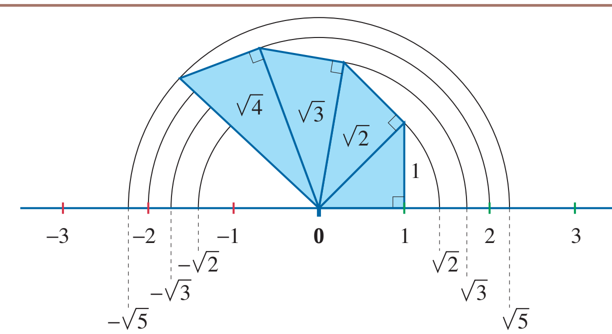


EJEMPLOS

2 **Observa cómo se sitúan en la recta real los números:**

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, -\sqrt{2}, -\sqrt{3}, -\sqrt{5}$

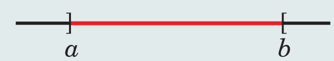
A partir del primer triángulo rectángulo isósceles de catetos 1 se construyen nuevos triángulos rectángulos de catetos 1 y la hipotenusa del anterior.



4 INTERVALOS

Dos números reales cualesquiera a y b (siendo $a < b$) determinan un intervalo al que pertenecen todos los números comprendidos entre a y b, los extremos pertenecerán o no dependiendo del tipo de intervalo.

TIPOS DE INTEVALOS

Condición	es decir...	se escribe	y es un intervalo...	se representa...
$a \leq x \leq b$	Números comprendidos entre a y b, incluidos a y b	$[a, b]$	cerrado	
$a < x < b$	Números mayores que a y menores que b	$]a, b[$	abierto	
$a \leq x < b$	Números comprendidos entre a y b, incluido a y excluido b	$[a, b[$	semiabierto por la derecha	
$a < x \leq b$	Números comprendidos entre a y b, excluido a e incluido b	$]a, b]$	semiabierto por la izquierda	

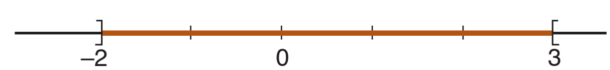
En ocasiones los corchetes se sustituyen por puntos rellenos (•) o huecos (o).

EJEMPLOS

3 **Representa el intervalo [1, 5 [y escribe la desigualdad que verifican los puntos del intervalo.**

El intervalo [1, 5 [está representado por el segmento comprendido entre el 1 y el 5, incluido el 1 y excluido el 5. La desigualdad será: $1 \leq x < 5$

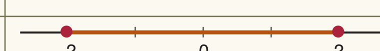
4 **Determina a qué intervalo corresponde el segmento**



El intervalo al que corresponde el segmento es] –2, 3 [

EJERCICIOS

6 Completa la tabla siguiente:

Condición	Intervalo	Representación
$2 < x \leq 3$		
		
	[–1, 4 [	
$3 < x < 5$		

5 VALOR ABSOLUTO: DISTANCIA

Recuerda que el valor absoluto de un número x se expresa $|x|$ y se define:

$|x| = x$ **si x es positivo**

$|x| = -x$ **si x es negativo**

$|x| = 0$ **si $x = 0$**

El valor absoluto de un número es el que tiene si se prescinde del signo.

EJEMPLOS

5 **Da el valor absoluto de los siguientes números: 8; $-4{,}5$; $3-\pi$; $5-\sqrt{26}$**

$|8| = 8$; $|-4{,}5| = 4{,}5$; $|3-\pi| = \pi - 3$, pues, $3-\pi$ es negativo; $|5-\sqrt{26}| = \sqrt{26} - 5$

Si x e y son dos puntos cualesquiera de la recta, se define la *distancia* entre ambos como $d(x, y) = |x - y|$.

La distancia entre los dos puntos es siempre una cantidad positiva o nula.

Si $x > y$ entonces $d(x, y) = x - y$

Si $x < y$ entonces $d(x, y) = y - x$

Si $x = y$ entonces $d(x, y) = 0$

En la práctica se identifica número real con punto de la recta real.

EJEMPLOS

6 **Determina los valores de x que verifican las siguientes ecuaciones en valor absoluto:**

a) $|x-2| = 3$ b) $|5-x| = 4$ c) $|2x-1| = 3$ d) $|x| = 5$

a) Por la propia definición de valor absoluto, $x-2$ podrá ser 3 ó -3, porque ambos dan como valor absoluto 3.
$x-2 = 3 \Rightarrow x = 5$; $x - 2 = -3 \Rightarrow x = -1$

Las soluciones de la ecuación en valor absoluto son $x = -1$ y $x = 5$

b) $|5-x| = 4 \Rightarrow 5-x = 4 \Rightarrow x = 1$; $5 - x = -4 \Rightarrow x = 9$
Las soluciones son $x = 1$; $x = 9$

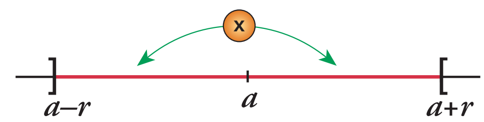
c) $|2x-1| = 3 \Rightarrow 2x-1 = 3 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$; $2x-1 = -3 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1$
Las soluciones son $x = -1$; $x = 2$

d) $|x| = 5 \Rightarrow x = 5$; $x = -5$

Si a es un número real cualquiera, la expresión $|x - a| < r$ indica que la distancia entre a y un número cualquiera x es menor que r.

$d(x, a) < r$ **equivale a** $|x-a| < r$ **equivale a** $a - r < x < a + r$

Gráficamente:

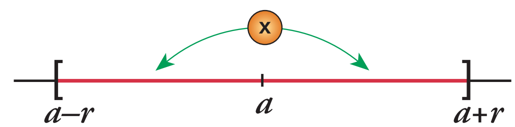


También se puede escribir que $x \in\ ]a-r, a+r[$.

Análogamente:

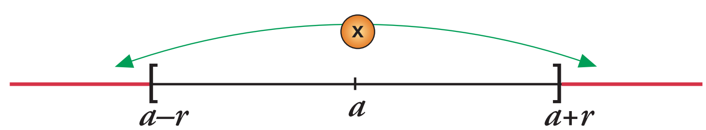
$\boldsymbol{d(x, a) \leq r}$ **equivale a** $\boldsymbol{|x-a| \leq r}$ **equivale a** $\boldsymbol{a-r \leq x \leq a+r}$

Y se puede escribir $\boldsymbol{x \in [a-r, a+r]}$



Si a un número real cualquiera, la expresión $\boldsymbol{|x-a| < r}$ indica que la distancia entre a y un número cualquiera x es mayor que r.

$\boldsymbol{d(x, a) > r}$ **equivale a** $\boldsymbol{|x-a| > r}$ **equivale a** $\boldsymbol{x > a+r}$ y $\boldsymbol{x < a-r}$



Tambien se puede escribir: $\boldsymbol{x \in]-\infty, a-r[\cup]a+r, +\infty[}$

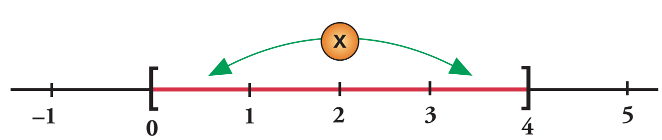
Análogamente:

$\boldsymbol{d(x,a) \geq r}$ **equivale a** $\boldsymbol{|x-a| \leq r}$ **equivale a** $\boldsymbol{x \geq a+r}$ y $\boldsymbol{x \leq a-r}$

Y se puede escribir: $\boldsymbol{x \in]-\infty, a-r] \cup [a+r, +\infty[}$

EJEMPLOS

7 **Los puntos *x* del intervalo:**

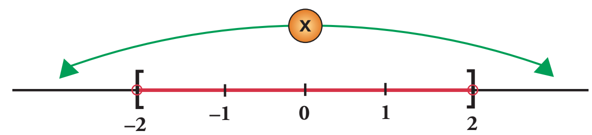


verifican indistintamente: $d(x, 2) \leq 2$; $|x-2| \leq 2$; $0 \leq x \leq 4$; $x \in [0,4]$

Si el intervalo fuera abierto los extremos 0 y 4 no pertenecerían a él y las desigualdades serían estrictas (< en lugar de ≤).

EJEMPLOS

8 **Los puntos x del intervalo:**



verifican indistintamente: $x < -2$ y $x > 2$; $d(x,0) > 2$; $|x| > 2$ y $x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$
Si en la solución entraran los puntos –2 y 2, las desigualdades no serían estrictas, serían ≥ ó ≤.

9 **Determina la solución de las desigualdades en valor absoluto siguientes:**

a) $|x-1| \leq 3$ **b)** $|x-1| \geq 3$ **c)** $|x+2| < 1$ **d)** $|x+2| > 1$

a) Si $|x-a| \leq r$ equivale a $a - r \leq x \leq a + r$, aplicándolo al ejemplo $|x-1| \leq 3$ obtendremos, $\Rightarrow 1-3 \leq x \leq 1+3 \Rightarrow -2 \leq x \leq 4 \Rightarrow x \in [-2, 4]$

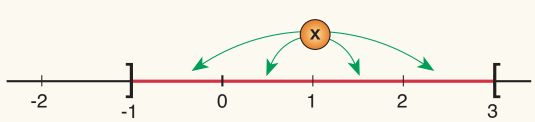
b) Si $|x-a| \geq r$ equivale a $x \geq a + r$ y $x \leq a - r$, aplicándolo al ejemplo $|x-1| \geq 3$ obtendremos, $x \geq 1+3$ y $x \leq 1-3$ de aquí $x \geq 4$ y $x \leq -2 \Rightarrow x \in]-\infty, -2] \cup [4, +\infty]$

c) Si $|x-a| < r$ equivale a $a - r < x < a + r$, aplicándolo al ejemplo $|x+2| < 1$, ahora $a = -2$, luego $-2-1 < x < -2+1 \Rightarrow -3 < x < -1 \Rightarrow x \in]-3, -1[$

d) Si $|x-a| > r$ equivale a $x > a + r$ y $x < a - r$, aplicándolo al ejemplo $|x+2| > 1$ ahora $a = -2$, luego $x > -2+1$ y $x < -2-1 \Rightarrow x > -1$ y $x < -3 \Rightarrow x \in]-\infty, -3[\cup]-1, +\infty[$

EJERCICIOS

7 ¿Qué condición verifican los puntos x señalados en la siguiente figura?



8 ¿Dónde situarías en la recta real los números x que distan de 3 menos de dos unidades?

9 Completa las siguientes desigualdades y representa sobre la recta real los números x que las verifican:

a) $d(x, 2) < 3$ equivale a $\square < x < \square$ b) $d(x, 1) \leq 5$ equivale a $\square \leq x \leq \square$
c) Si $1 \leq x \leq 5$ entonces $|x-3| \leq \square$ d) Si $x \in [0, 3]$ entonces $\square \leq x \leq \square$

10 ¿Verdadero o falso?

a) $d(x, 3) = 2$ sólo si $x = 1$ b) Si $x \in [-2, 2]$ entonces $d(x, 0) = 2$
c) $d(-4, 3) = d(-4, 0) + d(0, 3)$ d) Si $x \in]0, 4[$ entonces $d(x, 2) < 2$
e) $d(x, 3) > 5$ equivale a $x > 8$ y $x < -2$ f) $x \in]-\infty, 2[\cup]6, +\infty[$ entonces $d(x, 4) > 2$

6 ESTIMACIONES, APROXIMACIONES, REDONDEOS Y ERRORES

A) Estimaciones.

Estimar un resultado es deducir un valor aproximado del mismo.

B) Aproximaciones y redondeos.

En muchas ocasiones es innecesario manejar todas las cifras de un resultado, por ello se suele dar como resultado una **aproximación** del mismo.

El *orden* de una aproximación depende de la exactitud que se desee conseguir y puede ser por *defecto* o por *exceso*.

EJEMPLOS

8 **Si una parcela tiene 856,748 m^2, distintas aproximaciones son:**

Orden de aproximación	Por defecto	Por exceso
Entera	856	857
A las décimas	856,7	856,8
A las centésimas	856,74	856,75

La aproximación por defecto siempre es menor que el número dado y la aproximación por exceso siempre es mayor.

De las dos aproximaciones de un número la que menor error produce se llama **redondeo**. Para realizar un redondeo es necesario en primer lugar fijar el *orden del mismo* (centenas, unidades, décimas, centésimas, etc.) pues así se determina *cuántas cifras vamos a considerar*, y luego aplicar la siguiente regla:

Regla del redondeo $\Longrightarrow$

Si la primera cifra que no se va a escribir es menor que 5, se deja dicha cifra tal como está y ponemos ceros a la derecha si es necesario.

Si la primera cifra que no se va a escribir es mayor o igual que 5, la última cifra a escribir se aumenta una unidad y ponemos ceros a la derecha igualmente.

EJEMPLOS

10 **La longitud de una cuerda es de 34,562 m.** Distintos redondeos son:

Redondeo entero: 35 m   Redondeo a las décimas: 34,6 m   Redondeo a las centésimas: 34,56 m.

C) Errores.

Cuando el valor exacto A de una cantidad se sustituye por un valor aproximado A' se comete un error.

Se llama **error absoluto** a la diferencia, en valor absoluto, entre el valor exacto y el valor aproximado.

Si A = valor exacto y A' = valor aproximado, es:

Error absoluto $= |A - A'|$; Error relativo $= \dfrac{|A - A'|}{A}$

Se llama **error relativo** al cociente entre el error absoluto y el valor real.

El error absoluto mide la imprecisión que acompaña a cualquier medida; nos informa de la precisión del aparato utilizado o de lo cuidadosas que han sido nuestras medidas. El error relativo, sin embargo, indica de mejor forma la calidad de las mediciones: *a menor error relativo, mayor calidad de medida.*

EJEMPLOS

11 **Si en una parcela de 100 m de larga nuestra medida es de 101 m y en un trayecto de 6 km medimos 6,001 km, en ambos casos nos hemos equivocado en 1 metro y por tanto el error absoluto cometido es el mismo.**

El error relativo cometido en cada caso ya no es el mismo pues:

En la parcela: error relativo $= \dfrac{1}{100} = 0{,}01$

En el trayecto: error relativo $= \dfrac{1}{6000} = 0{,}000166\ldots$

Por tanto, la segunda medida es de mayor calidad pues se comete menor error relativo.

En multitud de ocasiones no se conoce el valor exacto de la magnitud a medir con lo cual es imposible conocer el error que se comete, por ello se suele dar el resultado acompañado de una **cota o margen del error** cometido.

EJEMPLOS

12 **Al medir la longitud de un bolígrafo con una regla graduada obtienes una longitud comprendida entre 12,5 cm y 12,7 cm.** Por tanto:

$$12{,}5 < \text{longitud} < 12{,}7$$

Podemos decir que la longitud del bolígrafo es de 12,6 cm con un error menor de 1 mm. La cota del error sería, en este caso, de 1 mm.

EJERCICIOS

11 Calcula mentalmente los números siguientes:

A = 32 + 45; B = 52 + 38; C = 125 + 34
D = 54 – 45; E = 1 024 – 850; F = 5,25 – 3,2
G = 53 × 7; H = 25 × 11; I = 0,11 × 0,9

12 Pon los paréntesis necesarios para que las siguientes igualdades sean ciertas:

ⓐ $3 - 5 + 8 = -10$ ⓑ $3 \times 4 - 2 = 6$
ⓒ $8 + 5 - 6 - 3 = 4$ ⓓ $4 + 3 \times 5 + 1 = 22$
ⓔ $1 - 3 - 4 \times 5 = 10$ ⓕ $1 - 3 - 4 \times 5 = -22$

13 Efectuar las operaciones siguientes:

ⓐ $43 - (-8) - 15$
ⓑ $-(-32) - (-11) + (-102)$
ⓒ $3 + 4 \times 2{,}5 - 1{,}2 + 6 \times 7 - 2$
ⓓ $(4 + 2) \times (1 - 7) + 6 \times 8 - 6$
ⓔ $1 - 2 \times (3 - 5) + 7 \times (8 - 10)$

14 Simplifica las expresiones siguientes donde x, y y z son números reales:

ⓐ $x - (y - z) - [x - (y + z) - (z + x)]$
ⓑ $1 - [3 - (5 - x)] - [3 - (5 - y)] - [3 - (5 - z)]$
ⓒ $x + y + z - (x - y + z) - (x - y - z) - (-x + y + z)$
ⓓ $x - [y - (z - 1)] - [z - (x - 1)] - [x - (y - 1)]$

15 Efectúa los cálculos siguientes con ayuda de la calculadora:

X = (2,3 + 5,1 – 1,4) × 7,2 – (4,5 + 3,8) – 1
Y = [2 – 3(45 – 18) + 159] – [3 – (1 + 4,3 × 5,7)]
Z = [(8,6 – 5,4) × 0,02 – 1,25] × (2,4 + 1,3 × 3,1)

LAS FRACCIONES

Del 16 al 24. Da los resultados de la forma más simple posible.

16 ⓐ $\frac{3}{5}+\frac{8}{5}$ ⓑ $3+\frac{1}{2}$ ⓒ $\frac{4}{3}+\frac{7}{6}$

17 ⓐ $4-\frac{2}{3}$ ⓑ $\frac{2}{3}-\frac{1}{5}$ ⓒ $\frac{3}{4}-\frac{4}{3}$

18 ⓐ $2+\frac{1}{6}-\frac{3}{2}$ ⓑ $\frac{1}{5}+\frac{5}{3}-2$ ⓒ $\frac{6}{5}-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$

19 ⓐ $2\left(3+\frac{1}{5}\right)$ ⓑ $3\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right)$ ⓒ $5\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{5}\right)$

20 ⓐ $\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{3}+\frac{3}{4}\right)$ ⓑ $\left(\frac{7}{5}-\frac{1}{11}\right):\left(\frac{3}{5}-2\right)$

21 ⓐ $\dfrac{\frac{3}{2}+\frac{5}{15}}{\frac{2}{3}-\frac{4}{5}}$ ⓑ $\dfrac{3-\frac{2}{5}}{7-\frac{3}{5}}$ ⓒ $\dfrac{\frac{4}{7}-\frac{10}{3}}{\frac{5}{6}-\frac{2}{7}}$

22 ⓐ $\frac{15}{8}-\frac{5}{3}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{8}$ ⓑ $8-\dfrac{\frac{3}{7}}{5}-\dfrac{3}{\frac{7}{5}}$

23 ⓐ $7-4:\frac{3}{5}-\frac{2}{5}:5$ ⓑ $9-\frac{7}{6}:3-3$

24 ⓐ $11-3:\frac{2}{3}+\frac{4}{3}:\frac{3}{5}$ ⓑ $\frac{11}{7}-\frac{2}{7}:\frac{7}{3}-\frac{4}{3}:\frac{7}{2}$

25 Escribe la fracción $\frac{-1}{27}$ como:

ⓐ Producto de dos fracciones
ⓑ Cociente de dos fracciones
ⓒ Producto de tres fracciones iguales

26 Calcula los productos $a \times b$ y después las sumas $a + b$ en los siguientes casos:

ⓐ $a = \frac{7}{3}$; $b = \frac{7}{4}$ ⓑ $a = \frac{5}{3}$; $b = \frac{5}{2}$

ⓒ $a = \frac{13}{9}$; $b = \frac{13}{4}$

¿Qué destacarías? Da otras fracciones con esta propiedad.

27 La longitud de una circunferencia de radio 1,25 cm, ¿es un número irracional? Da un valor aproximado a diezmilésimas.

28 El lado de un cuadrado de área 5 cm^2, ¿es un número irracional?

29 Encuentra un valor aproximado de Φ hasta las millonésimas.

30 Encuentra un valor aproximado hasta las milésimas del número $A = 2 + \pi + \Phi$. ¿Cómo clasificarías este número?

31 Indica a que conjunto numérico pertenece cada uno de los números siguientes:

a) $\frac{1}{2}$ b) 3 c) –5 d) 7 e) $\sqrt{2}$ f) ϕ

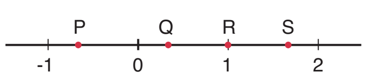
32 Representa gráficamente en la recta real los números siguientes:

a) $\frac{1}{3}$ b) 2,5 c) $\sqrt{3}$ d) $\sqrt{2}$ e) $\frac{4}{5}$ f) $-\frac{6}{5}$

33 Representa en la recta real los números:

a) –3 b) 0,25 c) 2,7 d) $\frac{3}{5}$ e) $\frac{-5}{2}$.

34 En la figura siguiente, ¿qué números pueden ser P, Q, R y S? ¿Puedes afirmar que son enteros?, ¿racionales?, ¿irracionales?



VALOR ABSOLUTO E INTERVALOS

35 Da el valor absoluto de cada uno de los siguientes números:

-1; $5{,}32$; $-3{,}45$; $\frac{5}{6}$; $\frac{-3}{5}$; 10^{-3}

36 Mismo ejercicio:

$\sqrt{3}-2$; $2-\sqrt{5}$; $\sqrt{10}-\sqrt{7}$; $\sqrt{6}-\sqrt{8}$

37 Completa la tabla siguiente:

a	b	$a+b$	$\lvert a\rvert$	$\lvert b\rvert$	$\lvert a+b\rvert$	$\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$
2	5					
–4	–7					
–5	3					
3	–6					

a) ¿Se puede concluir que $|a+b| < |a|+|b|$?

b) ¿Cuándo sería cierta la igualdad?

Del 38 al 44. Determina los números reales x que verifican las igualdades o desigualdades siguientes:

38 ⓐ $|x| = 2$ ⓑ $|x| = \pi$ ⓒ $|x| = \frac{2}{3}$

39 ⓐ $|x-3| = 1$ ⓑ $|x+2| = 4$ ⓒ $|x-4| = 4$

40 ⓐ $|x| < 2$ ⓑ $|x| < \frac{3}{2}$ ⓒ $|x| \le 5$

41 ⓐ $|x-1| < 2$ ⓑ $|3-x| < 1$ ⓒ $|x-6| \le 3$

42 ⓐ $2 < x+1 < 3$ ⓑ $3 < x-2 < 6$

43 ⓐ $|x-1| \ge 3$ ⓑ $|x-3| > 1$

44 ⓐ $|x| > 2$ ⓑ $|x| \ge 5$

Del 45 al 47. Expresa la relación dada de la forma $x \in \,]\,a, b\,[$ ó $x \in [a, b]$. Haz en cada caso la representación gráfica.

45 ⓐ $|x-4| < 2$; ⓑ $|x+3| < 1$

46 ⓐ $|2-x| < 3$; ⓑ $|-x+4| < 2{,}5$

47 ⓐ $3 \le x+1 \le 4$; ⓑ $2 \le 2+4x \le 10$

Del 48 al 50. Expresa la relación dada de la forma

$x \in \,]-\infty, a\,[\, \cup \,]\,b, +\infty\,[$ ó $x \in \,]-\infty, a\,] \cup [\,b, +\infty\,[$

Haz en cada caso la representación gráfica.

48 ⓐ $|x-3|>2$ ⓑ $|x-1| \ge 5$

49 ⓐ $\left.\begin{array}{l} x>3 \\ x<2 \end{array}\right\}$ ⓑ $\left.\begin{array}{l} x>5 \\ x<-1 \end{array}\right\}$

ⓒ $|2x+1| \ge 0$ ⓓ $|3x-4| \ge 5$

50 ⓐ $|x+1|>3$ ⓑ $|x+2| \ge 1$

ⓒ $x \ge 3$ ó $x \le 0$ ⓓ $x \le -5$ ó $x \ge -3$

NÚMEROS REALES

Del 51 al 53. De cada una de las cuestiones planteadas se ofrecen cuatro respuestas. Contesta si cada una de ellas es verdadera o falsa.

51 Si una circunferencia tiene 10 cm. de radio, entonces:

ⓐ Su longitud es exactamente 62,8 cm.

ⓑ El área del círculo es aproximadamente 314,16 cm^2.

ⓒ No se puede expresar con cifras el valor exacto de la longitud de la circunferencia.

ⓓ El área del círculo, en cm^2., es cinco veces mayor que la longitud de la circunferencia, en cm.

52 Si X = 43,28571, entonces:

ⓐ 43,3 es un redondeo de orden 10^{-1}.

ⓑ 43,2 es una aproximación decimal hasta las décimas por defecto.

ⓒ 43,28 es mejor aproximación que 43,29.

ⓓ 43,286 es un redondeo hasta las milésimas.

53 Si a es un número irracional y b un número real cualquiera, entonces:

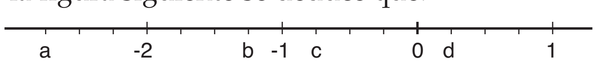
ⓐ a^2 es un número irracional.

ⓑ $3 + a$ es un número irracional.

ⓒ $a + b$ es un número irracional.

ⓓ $\frac{a}{b}$ Es un número irracional.

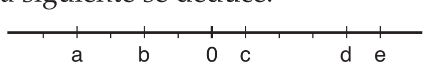
54 De la figura siguiente se deduce que:



ⓐ d = 0 ⓑ c es racional

ⓒ d = 0,25 ⓓ a = –3

55 De la figura siguiente se deduce:



ⓐ $|a| = |d|$ ⓑ $-b > c$

ⓒ $b > a$ ⓓ $c + d = e$

56 ¿Es cierto que $\frac{355}{113} = \pi$? Razona la respuesta.

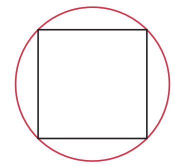
57 En un cuadrado de 28 m^2 de área, calcula:

ⓐ El valor exacto de su perímetro.

ⓑ Un redondeo hasta las milésimas de dicho valor.

58 En un cuadrado de lado 5 cm. Halla una aproximación hasta las décimas del valor de su diagonal.

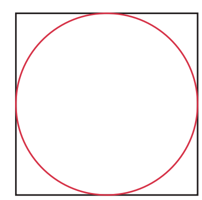
59 El cuadrado de la siguiente figura tiene 3 cm de lado.



Calcula el perímetro y el área del círculo circunscrito. Da el valor exacto y un valor redondeado hasta las milésimas.

60 El cuadrado de la figura tiene 5 cm de lado.

Calcula el perímetro y el área del círculo inscrito. Da el valor exacto y un redondeo hasta las milésimas.



APROXIMACIONES. ERROR Y ACOTACIÓN DE ERRORES

61 Halla un valor por defecto del número π con un error menor que una millonésima.

62 Si se toma 5,124 como un valor aproximado de 5,1247634189, ¿qué cota del error se ha tomado?

63 Da un valor aproximado $\sqrt{7}$ de con un error menor que una milésima.

64 Calcula la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1,5 m con un error menor que un milímetro.

65 Realiza los siguientes redondeos:

ⓐ 43250 a miles ⓑ 385 a centenas

ⓒ 73,268 a décimas ⓓ 0,2445 a centésimas

ⓔ 123,62 a enteros ⓕ 45,82648 a milésimas

AUTOEVALUACIÓN

1 **El número real $\sqrt{3}$ se puede escribir como:**

a $\frac{17}{10}$ b $1,\overset{\frown}{7}$ c 1,732050... d nada de lo anterior.

2 **Los puntos x que verifican la desigualdad $2 \le x < 5$ son los que se encuentran en el intervalo:**

a [2,5] b [2,5 [c] 2,5 [d Nada de lo anterior.

3 **La afirmación "un número irracional no puede ser escrito como el cociente de dos enteros" es:**

a Falsa. b Cierta para los números negativos.

c Cierta. d Nada de lo anterior.

4 **El conjunto de los números reales está formado por:**

a Los números naturales y los enteros negativos. b Los números racionales y los enteros.

c Los números racionales y los números irracionales. d Nada de lo anterior.

5 **¿Cuál es el valor absoluto de $7 - \sqrt{50}$?**

a $\sqrt{50} - 7$. b $7 - \sqrt{50}$. c $-\sqrt{50} + 7$. d Nada de lo anterior.

6 **¿Qué números reales verifican la siguiente igualdad: $| x + 5 | = 4$?**

a Solamente el –1. b –1 y –9.

c No existe ningún número que cumpla la igualdad. d Nada de lo anterior.

7 **La expresión $3 \le x \le 7$ equivale a:**

a $d(7, x)$. b $d(x, 5)$. c $x \in\ ]3, 7[$. d Nada de lo anterior.

8 **La expresión $|x - 5| < 1$ equivale a:**

a $x \in\ ]4, 6[$. b $d(x, 5) = 1$. c $-5 < x < 1$. d Nada de lo anterior.

9 **3,1416 es un valor aproximado de π con un error menor que:**

a Millonésima. b No es un valor aproximado, es un valor exacto.

c Una diezmilésima. d Nada de lo anterior.

10 **El conocimiento del error absoluto y el error relativo en una medida que hemos efectuado, nos informan de:**

a Si hemos utilizado el instrumento adecuado. b El grado de aproximación y la calidad de la medida.

c No tiene apenas interés para la medición. d Nada de lo anterior.