Dinámica del punto material.

I. Principios de la Dinámica.

1 Introducción.

- Estudia el movimiento teniendo en cuenta las fuerzas
- Principios válidos para sistemas de referencias inerciales.

2 Principios comunes con otras ciencias.

a. Determinismo: Lo ocurrido en un instante está determinado por el anterior
b. Causalidad: A las mismas causas le corresponden los mismos efectos

3 Postulados específicos.

a. Espacio:
   i. Uniforme: Propiedades iguales en todos sus puntos
   ii. Isótropo: Propiedades iguales en todas direcciones
   iii. Absoluto ó sistema de referencia inmóvil:
      Origen: Baricentro del sistema solar
      Direcciones fijas: Estrellas fijas
   iv. Otro S.R. válido: Galileano ó inercial, se traslada uniformemente respecto del absoluto.
   v. No relativista: Otras leyes de trasformación respecto del absoluto
b. Tiempo:
   i. Absoluto
   ii. Transcurre uniformemente

4 Primer Principio de la Dinámica*.*

a. Enunciado:
"El movimiento de una partícula sobre la que no actúan fuerzas o su suma es cero, es rectilíneo y uniforme"
b. Concepto implícito de efectos de las fuerzas: cambia la velocidad de las partículas
c. Concepto implícito de Sistema de Referencia Inercial
Un S.R. es inercial si cumple el primer principio de la dinámica: se observa una partícula libre de interacciones, con movimiento rectilíneo y uniforme
Propiedades de los S.R.I.
1: Todos los observadores en movimiento relativo de traslación uniforme miden idéntica aceleración del mismo punto móvil.
Hipótesis: "0" se traslada uniformemente respecto de "1", $\vec{a}^P_{0,1} = 0,\ \vec{\omega}_{0,1} = 0$

$$\vec{a}^P_{2,1} = \vec{a}^P_{2,0} + \vec{a}^P_{0,1} + 2\vec{\omega}_{0,1} \times \vec{v}^P_{2,0} \rightarrow \vec{a}^P_{2,1} = \vec{a}^P_{2,0}$$

2: Si "1" es inercial y "0" se traslada uniformemente respecto de "1", "0" es inercial
"0" se traslada uniformemente respecto de "1", $\vec{a}^P_{2,1} = \vec{a}^P_{2,0}$
"1" es inercial $\vec{a}^P_{2,1} = \vec{a}^P_{2,0} = 0 \rightarrow \vec{v}^P_{2,0} = \overrightarrow{cte}$, "0" ve a "2" con m.r.u. → "0" es inercial

5 Segundo principio de la Dinámica.

a. Enunciado: $\sum_i \vec{F}_i = m\,\vec{a}$ (medida dinámica de las fuerzas)

b. Conceptos implícitos:

i. Las fuerzas se comportan como vectores ligados aplicados a la partícula
Consecuencias

1. Puede proyectarse en cualquier dirección $\vec{\upsilon}$

$$\vec{F}\cdot\vec{\upsilon} = m\vec{a}\cdot\vec{\upsilon} \;\rightarrow\; F_{\vec{\upsilon}} = ma_{\vec{\upsilon}}\,, \quad (\;|\vec{\upsilon}| = 1\;)$$

2. La suma de las fuerzas produce suma de efectos (aceleraciones).

$$\vec{F}_i = m\,\vec{a}_i\;, \quad \longrightarrow \quad \sum_i \vec{F}_i = m\sum_i \vec{a}_i$$

ii. Masa inercial: constante de proporcionalidad entre las fuerzas y las aceleraciones que producen. Mide la resistencia al cambio de de velocidad
Consecuencia: "Principio de equivalencia".

Masa en campo gravitatorio: $\vec{F} = m\vec{g} \rightarrow\; m\vec{g} = m\vec{a} \rightarrow \vec{g} = \vec{a}$

Masa inercial = masa gravitatoria $\rightarrow$ Campo gravitatorio = Campo acelerado.

c. Resuelve conceptualmente el problema dinámico: Dada la fuerza se pueden obtener las ecuaciones del movimiento (Integración de la aceleración $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}$)

6 Principio de acción y reacción.

a. Enunciado: Las fuerzas ó interacciones entre dos partículas son iguales, de signo contrario y situadas en la recta que une las masas. $\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$

b. Conceptos implícitos:

i. La cantidad de movimiento de dos partículas aisladas se conserva.

$$m_1 \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_1}{\Delta t} = -m_2 \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_2}{\Delta t} \;\longrightarrow\; \Delta m_1\,\vec{v}_1 + \Delta m_2\,\vec{v}_2 = 0\,, \;\longrightarrow\; m_1\,\vec{v}_1 + m_2\,\vec{v}_2 = \vec{p}\;(cte.)$$

ii. Los efectos de las interacciones entre partículas son instantáneos

II Integrales primeras.

1 Formulación del problema dinámico.

a. Dadas la ley horaria $\vec{r} = \vec{r}(t)$ obtener la fuerza

b. Dadas las fuerzas $\vec{F} = \vec{F}\,(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)$, obtener las leyes horarias del movimiento $\vec{r} = \vec{r}(t)$ y las trayectorias: Solución de tres ecuaciones diferenciales de 2º orden.
Integrales primeras: Ecuaciones diferenciales de primer orden.

2 Teorema de conservación de la cantidad de movimiento.

a. Si la partícula está aislada ó $\sum_i \vec{F}_i = 0 \rightarrow \vec{p} = m\vec{v} = \overrightarrow{cte}$

b. Proyección en una dirección: $\vec{\upsilon}\cdot\vec{F} = m\,\vec{a}\;\cdot\vec{\upsilon}$. $F_{\vec{\upsilon}} = ma_{\vec{\upsilon}}$, si $F_{\vec{\upsilon}} = 0 \longrightarrow\; v_{\upsilon} = cte$

3 Teorema del impulso mecánico y de la cantidad de movimiento.

$$\int_{t_0}^{t}\vec{F}\,dt = \Delta\,\vec{p}$$

$d\,\vec{I} = \vec{F}\,dt$: impulso mecánico elemental, (tiene importancia en dinámica impulsiva).

4 Teorema de la energía cinética.

a. Enunciado: El trabajo de la resultante se emplea en cambiar la energía cinética de la partícula. W = ΔT

b. Demostración [1]: $d'W = \vec{F}\cdot d\vec{l} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt}d\vec{l} = m\vec{v}\ d\vec{v} = d\,T \longrightarrow W = \Delta T$

Expresión en forma diferencial: $d'W = d\,T$

Expresión en términos de potencia: $\dfrac{d'W}{dt} = \dfrac{dT}{dt}$, $P = \dfrac{d'W}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$,

$$\vec{F}\cdot\vec{v} = \frac{dT}{dt}$$

c. Caso de fuerzas conservativas $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$:

$\vec{F}\cdot d\vec{l} = -d\,U$, $d\,W = -d\,U$, $-dU = dT$, $d(T+U) = 0$ T+U=E (E constante)

d. Caso de fuerzas conservativas y no conservativas:

$W = W_{N.C} + W_C$, $W_{N.C.} - \Delta U = \Delta T$, $W_{nc} = \Delta(T+U)$;

Expresión en términos de potencia: $\vec{F}_{N.C}\cdot\vec{v} = \dfrac{d(T+U)}{dt}$

e. Caso de fuerzas normales a las trayectorias y otras fuerzas activas conservativas ($W_{N.C.}$=0)

T+U=E

Ejemplos:

Trabajo de la tensión de un hilo en un movimiento con suspensión

Trabajo de las fuerzas de ligaduras ideales en superficies y líneas vinculares

f. Aplicación: Una masa supuestamente puntual se encuentra sobre una superficie horizontal bajo la acción de un resorte también en posición horizontal. Obtener una integral primera del movimiento.

5 Teorema del momento cinético*:*

a. Expresión del teorema: $\dfrac{d\,\vec{L}_O}{d\,t} = \vec{M}_O + \vec{C}\times\vec{v}^o$

b. Momento cinético: $\vec{L}_O = \overrightarrow{OP}\times m\,\vec{v}$

$\vec{L}_O$: Vector fijo ó ligado al punto O

$\vec{v}$: Velocidad absoluta del punto móvil P, medida respecto de un S.R.I.

O: Centro de reducción.

c. Demostración: $\dfrac{d\vec{L}_O}{dt} = \dfrac{d\,\overrightarrow{OP}}{dt}\times m\vec{v} + \overrightarrow{OP}\times\dfrac{d\,m\vec{v}}{dt}$; $\dfrac{d\vec{L}_O}{dt} = (\vec{v} - \vec{v}^O)\times m\vec{v} + \overrightarrow{OP}\times\vec{F}$;

$\vec{M}_O = \overrightarrow{OP}\times\vec{F}$; $(\vec{v} - \vec{v}^O)\times m\vec{v} = -\vec{v}^O\times m\vec{v} = \vec{C}\times\vec{v}^O$, ($\vec{C} = m\vec{v}$: cantidad de movimiento)

d. Casos de cancelación del término complementario:

Si $\vec{v}^o = 0$, ó $\vec{v}^o \parallel \vec{v} \longrightarrow \dfrac{d\,\vec{L}_O}{d\,t} = \vec{M}_O$

e. Teoremas de conservación (Integral primera) en el caso $\vec{v}^o = 0$

i. Si $\vec{M}_O = 0 \longrightarrow \vec{L}_O = \overrightarrow{cte.}$

$M_O = \overrightarrow{OP}\times\vec{F} = 0 \rightarrow \overrightarrow{OP}\parallel\vec{F}$: Fuerzas centrales

Interpretación geométrica: $\vec{L}_O = \overrightarrow{cte.} \longrightarrow$ Velocidad areolar constante

$\vec{L}_O = \overrightarrow{OP}\times m\dfrac{d\overrightarrow{OP}}{dt}$; $\vec{L}_O = m\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left(\vec{r}\times\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right)$; $\vec{L}_O = m\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\vec{r}\times\Delta\vec{r}}{\Delta t}$; $\vec{L}_O = 2m\dfrac{d\vec{A}}{dt}$

Enunciado: Si las fuerzas son centrales la velocidad areolar se conserva.

iii. Generalización: Proyección en una dirección constante y en el caso de O fijo

[1] El trabajo W es una función que depende de la trayectoria y no tiene diferencial exacta

$$\left(\frac{d\,\vec{L}_O}{d\,t} = \vec{M}_O\right)\vec{\upsilon} \;\rightarrow\; \frac{d\,L_{\vec{\upsilon}}}{d\,t} = M_{\vec{\upsilon}} \;^{(2)}$$

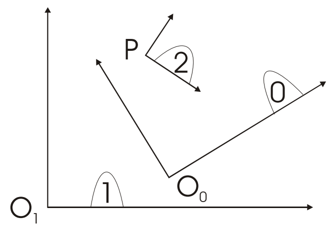
Subteorema 1: Si $M_\upsilon = \left(\overrightarrow{OP}\times\vec{F}\right)\cdot\vec{\upsilon} = 0$ $(\overrightarrow{OP},\vec{F},\vec{\upsilon}$: coplanarios$)$ $L_{\vec{\upsilon}} = cte$

Subteorema 2: . Si $\vec{F}$ corta a $\vec{\upsilon}$, ó $\vec{F}\,||\,\vec{\upsilon}$, la proyección de la velocidad areolar en el plano normal a $\vec{\upsilon}$ se conserva. (Interpretación geométrica)
$\overrightarrow{OP},\vec{F},\vec{\upsilon}$: coplanarios $\rightarrow \vec{F} = \lambda\,\overrightarrow{OP} + \mu\,\vec{\upsilon}$, $\vec{F}$ posee dos proyecciones $\vec{F}_{\overrightarrow{OP}}\,||\,\overrightarrow{OP}$, $\vec{F}_{\vec{\upsilon}}\,||\,\vec{\upsilon}$ y el producto $\left(\overrightarrow{OP}\times\vec{F}\right)\cdot\vec{\upsilon}$ se anula con cualquiera de esas proyecciones. Luego $L_{\vec{\upsilon}} = cte.$, pero $L_{\vec{\upsilon}}$ es proporcional a la velocidad areolar proyectada en la dirección normal a $\vec{\upsilon}$

c. Aplicaciones: a) Masa sobre una superficie horizontal. b) Masa sobre una superficie cónica sin rozamiento y sujeta mediante un resorte al vértice.

III Sistemas de referencias no inerciales.

1 Nomenclatura de los sistemas de referencia.



a. "1" Inercial ó absoluto
b. "0" No inercial ó relativo, donde se desea la descripción.
c. "2" S.R. asociado a la partícula objeto de estudio.

2 Descripción en sistemas de referencia relativos ("0").

a. Análisis general

El segundo principio de la dinámica solo es aplicable en sistemas de referencias inerciales. Si hemos de operar en otros S.R. se ha de modificar la segunda ley de Newton.

Ley de composición de aceleraciones: $\vec{a}^P_{2,1} = \vec{a}^P_{2,0} + \vec{a}^P_{0,1} + 2\vec{\omega}_{0,1}\times\vec{v}^P_{2,0}$

Multiplicando por m, teniendo en cuenta que $\vec{F} = m\vec{a}^P_{2,1}$ y despejando $m\vec{a}^P_{2,0}$

$$\vec{F} = m\vec{a}^P_{2,1} = m\,(\vec{a}^P_{2,0} + \vec{a}^P_{0,1} + 2\vec{\omega}_{0,1}\times\vec{v}^P_{2,0}) \quad \vec{F} - m(\vec{a}^P_{0,1} + 2\vec{\omega}_{0,1}\times\vec{v}^P_{2,0}) = m\vec{a}^P_{2,0}\,.$$

$$\vec{F} + \vec{F}_a + \vec{F}_C = m\,\vec{a}^P_{2,0}$$

Puede concluirse que si incluimos las fuerzas no interactivas, llamadas de inercia

Arrastre: $\vec{F}_a = -m\vec{a}^P_{0,1}$

Coriolis $\vec{F}_C = -2m\,\vec{\omega}_{0,1}\times\vec{v}^P_{2,0}$,

la descripción dinámica es análoga a la de los sistemas de referencia inerciales y podrá utilizarse los mismos teoremas. Estas fuerzas pueden trabajar ó no, ser conservativas, etc.
Fuerzas de Inercia: Fuerzas no interactivas se deben a que el sistema de referencia no es inercial

b. Análisis de la fuerza de arrastre $\vec{F}_a = -m\vec{a}^P_{0,1}$

i. Expresión general $\vec{F}_a = -m\,\vec{a}^O_{0,1} - m\;\vec{\alpha}_{0,1}\times\overrightarrow{OP} - m\,\vec{\omega}_{0,1}\times(\vec{\omega}_{0,1}\times\overrightarrow{OP})$

ii. Caso de "0/1" en movimiento de traslación permanente: $\vec{\omega}_{0,1} = 0$, $\vec{\alpha}_{0,1} = 0$ $\rightarrow$

$$\vec{F}_a = -\,m\,\vec{a}^P_{0,1} = -\,m\,\vec{a}^O_{0,1}\,,\;\; \vec{F}_C = 0$$

iii. Caso de "0/1 en movimiento de rotación pura (no helicoidal) y con el punto O situado en el eje de rotación (ver figura):

$-m\,\vec{\alpha}_{0,1}\times\overrightarrow{OP}$: componente azimutal

---

[2] L_υ proyección de $\vec{L}_O$ sobre $\vec{\upsilon}$, $M_\upsilon = \left(\overrightarrow{OP}\times\vec{F}\right)\cdot\vec{\upsilon}$: momento áxico de $\vec{F}$

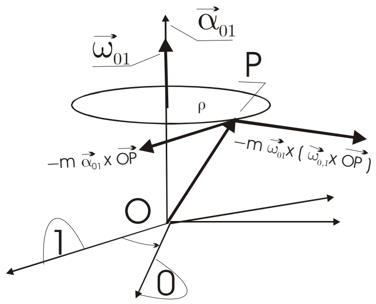
$-m\,\vec{\omega}_{0,1} \times (\vec{\omega}_{0,1} \times \overrightarrow{OP})$: componente centrífuga

iv. Caso movimiento “0/1” de rotación permanente (movimiento plano) y uniforme $\vec{v}^{O}_{2,0} = 0$ (O en el E.P.R.)

$\vec{\alpha}_{0,1} = 0$

$\vec{F}_a = m\omega^2 \rho\ \vec{u}_\rho$ (ρ: radio de giro)

$\vec{F}_a$ conservativa $\Delta U = -\frac{1}{2} m \omega^2_{0,1} \rho^2$



c. Análisis de la fuerza de Coriolis: $\vec{F}_C = -2m\,\vec{\omega}_{0,1} \times \vec{v}^{P}_{2,0}$;

Casos en que se anula.

$\vec{F}_C = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{\omega}_{0,1} = 0$ ó $\vec{v}^{P}_{2,0} = 0$ ó $\vec{\omega}_{0,1} \parallel \vec{v}^{P}_{2,0}$

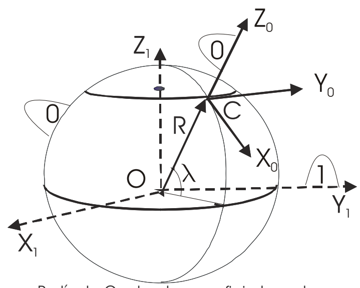
Propiedad: No trabaja en el S.R. relativo $\vec{F}_C \cdot \vec{v}^{P}_{2,0} = 0$

b. <u>Caso de una partícula libre</u>: $\vec{a}^{P}_{2,1} = 0 \ \longrightarrow\ \vec{a}^{P}_{2,0} = -\vec{a}^{P}_{0,1} - 2\vec{\omega}_{0,1} \times \vec{v}^{P}_{2,0}$

La partícula libre se observa con aceleración. Para aplicar el segundo principio debemos considerar que actúan las fuerzas de inercia.

$$\vec{F}_I = m\,(-\vec{a}^{P}_{0,1} - 2\vec{\omega}_{0,1} \times \vec{v}^{P}_{2,0}\ \ \vec{a}^{P}_{2,0})$$

3 Aplicación: Movimiento en la superficie terrestre.



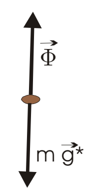
Partícula C sobre la superficie terrrestre

a. Sistema de referencia fijo “1”: Origen O : Centro de la Tierra
b. Sistema de referencia relativo “0”: Tierra
   i. Origen C: lugar de la superficie terrestre
   ii. CZ_0: vertical del lugar
   iii. CX_0Y_0: plano horizontal del lugar
      CX_0: tangente al meridiano
      CY_0: tangente al paralelo
c. Estudio de la gravedad aparente:
   i. Caso estático relativo a la superficie de la Tierra ($\vec{a}^{P}_{2,0} = 0$, $\vec{v}^{P}_{2,0} = 0$):

$\vec{\Phi} + m\,\vec{g} + \vec{F}_a + \vec{F}_C = m\,\vec{a}^{P}_{2,0}$, $\quad \vec{\Phi} + m\,\vec{g} + \vec{F}_a + \vec{F}_C = 0$

$\vec{F}_C = -2m\,\vec{\omega}_{0,1} \times \vec{v}^{P}_{2,0}$, $\quad \vec{v}^{P}_{2,0} = 0$, $\quad \vec{F}_C = 0$

$\vec{F}_a = -m\,\vec{a}^{P}_{0,1}$, $\quad \vec{a}^{P}_{0,1} = \vec{a}^{O}_{0,1} + \vec{\alpha}_{0,1} \times \overrightarrow{OP} + \vec{\omega}_{0,1} \times (\vec{\omega}_{0,1} \times \overrightarrow{OP}) = \vec{\omega}_{0,1} \times (\vec{\omega}_{0,1} \times \overrightarrow{OP})$



Partícula en equilibrio
en la superficie terrestre

$\vec{a}^{O}_{0,1} = 0$: porque O está en el eje de rotación

$\vec{\alpha}_{0,1} = 0$: porque se trata de rotación uniforme

$-\vec{\omega}_{0,1} \times (\vec{\omega}_{0,1} \times \overrightarrow{OP})$: Aceleración centrífuga

$\vec{F}_a = -m\,\vec{\omega}_{0,1} \times (\vec{\omega}_{0,1} \times \overrightarrow{OP})$

$\vec{\Phi} = -m\,\vec{g}^*$ (gravedad aparente)

$\vec{g}^* = \vec{g} - \vec{\omega}_{0,1} \times (\vec{\omega}_{0,1} \times \overrightarrow{OP})$:

   ii. Movimiento relativo en caida libre ($\vec{v}^{P}_{2,0} \neq 0$):

$m\,\vec{g} + \vec{F}_a + \vec{F}_C = m\,\vec{a}^{P}_{2,0}$, $\quad \vec{a}^{P}_{2,0} = \vec{g}^{**}$ (gravedad aparente)

$m\,\vec{a}^{P}_{2,0} = m\,\vec{g} - m\,\vec{a}^{P}_{0,1} - 2m\,\vec{\omega}_{0,1} \times \vec{v}^{P}_{2,0}$, $\quad \vec{g}^{**} = \vec{g} - \vec{\omega}_{0,1} \times (\vec{\omega}_{0,1} \times \overrightarrow{OP}) - 2\,\vec{\omega}_{0,1} \times \vec{v}^{P}_{2,0}$

IV Dinámica del punto vinculado.

1 Generalidades.

a. Concepto de vínculo: Limitación impuesta a las coordenadas de posición y ó velocidad de una partícula
b. Expresión del vínculo: Ecuación ó inecuación que liga las coordenadas de posición y ó sus derivadas temporales y el tiempo.

$$\Psi(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)=0$$

2 Clasificación según diferentes criterios.

a. Dependencia ó no de derivadas temporales: cinemáticos ó geométricos
b. Dependencia ó no del tiempo: reónomos ó esclerónomos
c. Relación de desigualdad ó igualdad: unilaterales ó bilaterales
d. Idealidad ó no: lisos ó rugosos (con rozamiento)
e. Integrabilidad ó no: holónomos y heterónomos (no holónomos)

3 Grados de libertad.

a. Definición: Nº de coordenadas libres ó independientes que definen la posición.
b. Expresión: l =3-r. (r =nº de ecuaciones de ligadura)
c. Clasificación
   i. Isostáticos: l=0
   ii. Hiperestáticos: l<0 (Caso en el sólido rígido)
   iii. Con grados de libertad: l>0

4 Principio de liberación.

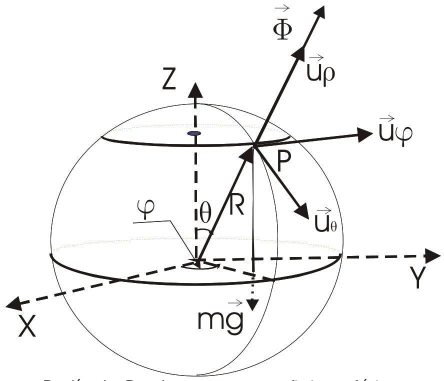
a. Enunciado: La partícula se puede considerar libre de vínculos si se sustituyen los vínculos por fuerzas de acción vincular que realicen la acción del vínculo.
b. Características de las fuerzas vinculares
   i. Realizan en todo instante la misma función del vínculo al que sustituyen
   ii. Su módulo es desconocido a priori, y depende del movimiento y de las fuerzas activas.
   iii. Dirección en vínculos geométricos bilaterales ideales (sin rozamiento)
        Normal a las superficies y líneas vinculares.
        En el caso de que sea un punto, la dirección pasa por el.
   iv. Actúan en los movimientos impedidos ó condicionados:

5 Movimiento vinculado a una superficie Ψ(x,y,z)=0 sin rozamiento.

a. Fuerza de ligadura $\vec{\Phi}=\lambda\vec{\nabla}\psi$
b. Liberación: $\vec{F}+\lambda\vec{\nabla}\psi=m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$.
   Sistema determinado, formado por cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas: tres ecuaciones diferenciales de 2º orden mas la ecuación de ligadura
   Puede proyectarse en cualquier dirección constante.
   $$\left(\vec{F}+\lambda\vec{\nabla}\psi=m\vec{a}\right)\vec{\upsilon}$$
c. Integrales primeras:
   v. Caso de sistemas conservativos donde las fuerzas vinculares no realicen trabajo: $\vec{F}=-\vec{\nabla}V$, T+U=E (cte.)

vi. Caso de sistemas no conservativos: $W_{N.C.}=\Delta$ (T+U).

6 Aplicación



Partícula P sobre una superficie esférica

a. Especificación: Partícula vinculada sin rozamiento a una superficie esférica situada en el campo gravitatorio terrestre.
b. Expresión del vínculo
   i. Cartesianas: $x^2+y^2+z^2=R^2$
   ii. Cilíndricas: $z^2+\rho^2=R^2$
   iii. Esféricas: $\rho=R$
c. Clasificación del vínculo: Geométrico, esclerónomo, bilateral, ideal y holónomo.
d. Grados de libertad: l=3-1=2.
e. Coordenadas libres en esféricas: θ, φ
f. Integrales primeras en esféricas
   i. Sistema conservativo (el vínculo no trabaja): T+U=E (cte.)

$$E=\frac{1}{2}mv^2+mgh=\frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\theta}^2+R^2sen^2\theta\ \dot{\varphi}^2\right)+mgR\cos\theta$$

   ii. La fuerza activa es paralela a OZ y la vincular corta al eje OZ: L_z= cte. ó la velocidad areolar proyectada en OXY es constante.

$$L_z=\vec{L}_o\cdot\vec{k}\ ,\quad \vec{L}_O=R\,\vec{u}_\rho\times m\,(R\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta+R\,sen\,\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi)\ ,\quad \vec{k}=\vec{u}_\rho\cos\theta-\vec{u}_\theta\,sen\,\theta$$

$$R^2sen^2\theta\ \dot{\varphi}=cte.$$

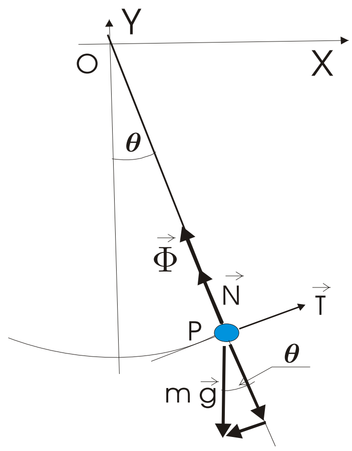
7 Movimiento vinculado a una curva Ψ₁(x,y,z)=0 , Ψ₂(x,y,z)=0, sin rozamiento.

a. Fuerza de ligadura $\vec{\Phi}=\lambda_1\vec{\nabla}\psi_1+\lambda_2\vec{\nabla}\psi_2$, no trabaja
b. Liberación:

$$\vec{F}+\vec{\Phi}=m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\ .$$

Sistema de ecuaciones determinado, formado por cinco ecuaciones y cinco incógnitas: tres ecuaciones diferenciales de 2º orden mas dos ecuaciones de ligadura.
Puede proyectarse en cualquier sistema de coordenadas
c. Integrales primeras:
   i. Caso de sistemas conservativos: $\vec{F}=-\vec{\nabla}V$, T+U=E (cte.)
   ii. Caso de sistemas no conservativos:
   $W_{N.C.}=\Delta$ (T+U).
   $W_{N.C.}=\int_{P_0}^{P}\vec{F}_{N.C.}d\vec{l}$. La fuerza vincular no trabaja.

8 Aplicación: Péndulo simple en el vacío.



Péndulo simple

a. Especificación: Partícula suspendida de un hilo inextensible y sin masa, situada en el campo gravitatorio, y obligada a moverse en un plano vertical.
b. Expresión del vínculo
   i. Cartesianas: $x^2+y^2=R^2$
   ii. Polares: $\rho=R$
c. Clasificación del vínculo: Geométrico, esclerónomo, bilateral, ideal y holónomo.
d. Grados de libertad: l=2-1=1.

e. Coordenada libre: θ

f. Aplicación del 2º principio en componentes intrínsecas:

i. Fuerza de ligadura: $\vec{\Phi} = \Phi\,\vec{N}$

ii. Expresión del segundo principio: $\vec{F} + \vec{\Phi} = m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

Componente normal: $\Phi - mg\cos\theta = m\dfrac{\vec{v}^2}{R}$

Componente tangencial: $-mg\,sen\,\theta = m\dfrac{d^2s}{dt^2}$

iii. Solución para pequeñas oscilaciones (sen(θ) ≈ θ, s = Rθ)

$\ddot{\theta} + \dfrac{g}{R}\theta = 0$, $\longrightarrow$ $\theta = \theta_0\cos(\omega t + \varphi_0)$

Donde: $\omega^2 = \dfrac{g}{R}$, $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ $\rightarrow$ $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}$

g. Integral primera en coordenadas polares

Sistema conservativo (el vínculo no trabaja):

T+U=E (cte.); $E = \dfrac{1}{2}m\,v^2 + m\,g\,h = \dfrac{1}{2}m\,R^2\dot{\theta}^2 - m\,g\,R\cos\theta$

Solución para oscilaciones finitas (Para t=0, $\theta(0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(0) = 0$):

$\dot{\theta}^2 = \dfrac{2g}{R}\left[\cos\theta - \cos\theta_0\right]$ $\rightarrow$ $t = \sqrt{\dfrac{R}{2g}}\displaystyle\int_{\theta_0}^{\theta}\dfrac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$

V Aplicaciones clásicas del movimiento del punto material.

1 Movimiento rectilíneo.

a. Características

i. Grados de libertad: 1

ii. Ecuación diferencial del caso general: $m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t)$

b. Finalidad del estudio

i. Caso con solución analítica: obtener x=x(t)

ii. Caso sin solución analítica: hacer estudio cualitativo

c. Integral primera en el caso general. Teorema de la energía $\displaystyle\int_{x_0}^{x} F dx = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$

d. Movimientos con fuerzas conservativas. $F = -\dfrac{dU}{dx}$:

i. Conservación de la energía: T+U=E (cte.)

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U = E \;\rightarrow\; \dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - U(x)} \;\rightarrow\; t = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$$

ii. Análisis cualitativo de la solución mediante la gráfica de potenciales U(x)/x:

Región del movimiento:

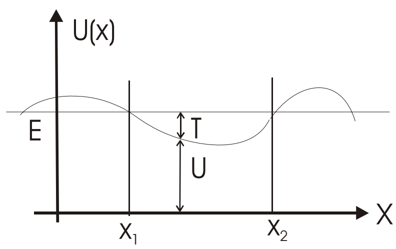
E-U(x) ≥ 0 → U(x) ≤ E

Puntos singulares, libración ó retorno $\dot{x} = 0$,

E=U(x):

Caso de dos puntos x_1 y x_2: El movimiento está confinado en el dominio $x_1 \le x \le x_2$

Propiedad: el movimiento es periódico



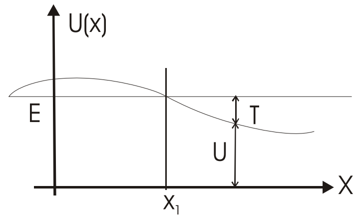
Movimiento unidimensional con dos puntos de libración

$$T = 2\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$$

Caso de fuerzas elásticas $\vec{F} = -K(x - x_0)$:

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} K(x - x_0)^2 = E\ , \quad \dot{x} = 0 \ \longrightarrow \quad x = x_0 \pm \sqrt{\frac{2E}{K}}$$

Caso de un solo punto x_1 : La recta U = E, corta a U(x) en un solo punto. Si P se dirige a x_1, invierte el movimiento en x_1 y se aleja indefinidamente.



Movimiento unidimensional con un solo punto de libración

e. Movimiento rectilíneo bajo fuerza conservativa y rozamiento dependiente de la velocidad:

i. Fuerza de rozamiento $F_r = -\mu \dot{x}$

ii. W=Δ(T+U); $W = \Delta E = -\int_{x_1}^{x} \mu \dot{x} dx$

iii. Característica: Perdida de energía. Movimiento aperiódico

2 Movimiento de una partícula sometida a movimiento central.

a. Solución mediante integrales primeras utilizando coordenadas polares.

i. Conservación de la velocidad areolar (ó momento cinético): $\rho^2 \dot{\theta} = C$;
C es el doble de la velocidad areolar

ii. Conservación de la energía. Si la fuerza depende solo de la distancia es conservativa.

T+U=E, $U(\rho) = U(\rho_0) - \int_{\rho_0}^{\rho} \vec{F}\ d\vec{l}$, $U(\rho) = U(\rho_0) - \int_{\rho_0}^{\rho} F\ d\rho$

$$\frac{1}{2} m(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2) + U(\rho) = E$$

b. Cálculo de la fuerza conocida la ecuación de la trayectoria ρ=ρ(θ)

Ecuación de Binet: $F = -\frac{mc^2}{\rho^2}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\right]$

3 Aplicación.

Movimiento de un punto material bajo la acción exclusiva de una fuerza central dependiente solo de la distancia de la partícula al centro del movimiento.

a. Energía potencial de la fuerza central:

$$\vec{F} = F(\rho)\vec{u}_\rho \ \rightarrow \ U(\rho) = U(0) - \int_0^{\rho} \vec{F} d\vec{s}\ ,\ d\vec{s} = d\rho\ \vec{u}_\rho + \rho d\theta\, \vec{u}_\vartheta\ ;\ U(\rho) = U(0) - \int_0^{\rho} F(\rho) d\rho$$

b. Integrales primeras

i. Constancia del momento cinético ó de la velocidad areolar

$$\vec{M}_O = 0 \rightarrow \vec{L}_O = cte.;\quad \vec{L}_O = \overrightarrow{OP} \times m\vec{v}_{2,1}^{P} = \rho\vec{u}_\rho \times m\left(\dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta\right)$$

$\rho^2 \dot{\theta} = c$; (c= cte= doble de la velocidad areolar)

ii. Conservación de la energía: T+U = E (cte.)

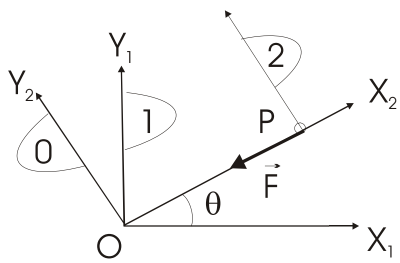
$$T = \frac{1}{2} m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2\right),\quad T = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \frac{c^2}{\rho^2}\right)$$

$$\frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \frac{c^2}{\rho^2}\right) + U(\rho) = E$$

iii. Problema unidimensional equivalente.

$\frac{1}{2} m\dot{\rho}^2 + U'(\rho) = E$, donde

$$U'(\rho) = U(\rho) + \frac{1}{2} m \frac{c^2}{\rho^2}\ ,$$



Puntos de libración: $\dot{\rho}=0$

c. Solución para un observador no inercial

i. Sistema de referencia no inercial: "0"

Origen centro del movimiento O, OX_2= OP

Caracterización: $\vec{\omega}_{0,1}=\dot{\theta}\vec{k},\ \vec{v}^{O}_{0,1}=0$

ii. Ecuación de la dinámica en el S.R.N.I. : $\vec{F}+\vec{F}_a+\vec{F}_C=m\vec{a}^{P}_{2,0}$

$$\vec{a}^{P}_{2,0}=\ddot{\rho}\vec{u}_{\rho}$$

$$\vec{F}_a=-m\vec{a}^{P}_{0,1}=-m\,(\vec{a}^{O}_{0,1}+\vec{\alpha}_{0,1}\times\overrightarrow{OP}+\vec{\omega}_{0,1}\times\vec{\omega}_{0,1}\times\overrightarrow{OP})$$

$$\vec{a}^{O}_{0,1}=0\,,\quad \vec{\alpha}_{0,1}\times\overrightarrow{OP}=\ddot{\theta}\vec{k}\times\rho\vec{u}_{\rho}=\rho\ddot{\theta}\vec{u}_{\theta}\,,\quad \vec{\omega}_{0,1}\times(\vec{\omega}_{0,1}\times\overrightarrow{OP})=-\rho\dot{\theta}^2\vec{u}_{\rho}$$

$$\vec{F}_a=-m\rho\ddot{\theta}\vec{u}_{\theta}+m\rho\dot{\theta}^2$$

$$\vec{F}_C=-2m\vec{\omega}_{0,1}\times\vec{v}^{P}_{2,0}=-2m\dot{\theta}\vec{k}\times\dot{\rho}\vec{u}_{\rho}=-2m\dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u}_{\theta}$$

$$F\vec{u}_{\rho}-m\rho\ddot{\theta}\vec{u}_{\theta}+m\rho\dot{\theta}^2\vec{u}_{\rho}-2m\dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u}_{\theta}=m\ddot{\rho}\vec{u}_{\rho}$$

Componente transversal: $m\rho\ddot{\theta}+2m\dot{\rho}\dot{\theta}=0\rightarrow\dfrac{m}{\rho}\dfrac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\theta}\right)=0\ \rightarrow\ \rho^2\dot{\theta}=c(cte.)$

Componente radial: $F+m\rho\dot{\theta}^2=m\ddot{\rho}$

Sustituyendo en esta última expresión $\dot{\theta}=\dfrac{c}{\rho^2}$, se reduce al problema unidimensional equivalente: $F+m\dfrac{c^2}{\rho^3}=m\ddot{\rho}$ (Dos fuerzas $\vec{F}$ y $m\dfrac{c^2}{\rho^3}$)

Energías potenciales: $dU_{cf}=-m\dfrac{c^2}{\rho^3}d\rho\ \rightarrow\ U_{cf}=\dfrac{mc^2}{2\rho^2}$

Energía cinética: $T=\dfrac{1}{2}m\dot{\rho}^2$

Conservación de la energía: T+ U = E, $\dfrac{1}{2}m\dot{\rho}^2+U(\rho)+\dfrac{mc^2}{2\rho^2}=E$

Los puntos de libración se obtienen imponiendo $\dot{\rho}=0$

Bibliografía

"Cuadernos de Mecánica. Dinámica". Marcelo Rodríguez Danta

"Curso de MECÁNICA RACIONAL. Dinámica". Manuel Prieto Alberca. Editorial A.D.I.