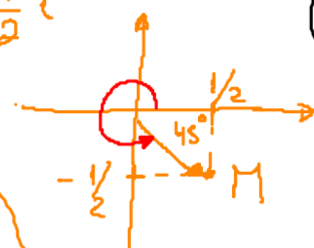
Raíz enésima de un número Complejo (debo resolver en forma trigonométrica)

$$Z = \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i} \qquad M = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$



1° Expresar todo en forma trigonométrica

$$|M| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$|M| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$|M| = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$w_M = 315° = 360° - 45°$$

$$|Z| \cdot cis\, w = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot cis\, 315°}$$

$$\left(|Z| \cdot cis\, w\right)^3 = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot cis\, 315°$$

$$|Z|^3 \cdot cis\, 3w = \sqrt{\frac{1}{2}}\, cis\, 315°$$

Igualo los módulos y los ángulos considerando los giros

$$\begin{cases} |Z|^3 = \sqrt{\frac{1}{2}} \\ 3w = 315° + 360° \cdot k \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, 3 \ldots\ldots$$

Despejo $|Z|$ y w

$$\begin{cases} |Z| = \sqrt[3]{\sqrt{1/2}} = \sqrt[6]{1/2} \\ w = \dfrac{315° + 360° k}{3} \end{cases}$$

$$w = 105° + 120° k$$

$$\begin{cases} |z| = \sqrt[6]{\frac{1}{2}} \\ W = 105^\circ + 120^\circ k \end{cases}$$

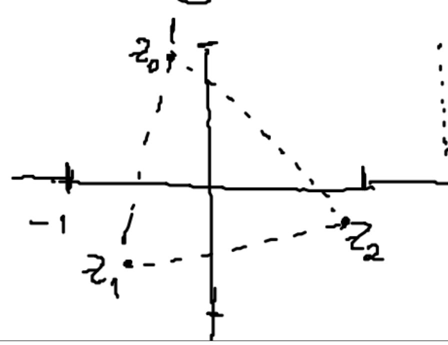
$$z = |z| \cdot \text{cis } W$$

$$\underbrace{z = \sqrt[6]{\frac{1}{2}} \cdot \text{cis}(105^\circ + 120^\circ k)}_{}$$

Respuesta general.

$$\sqrt[6]{\frac{1}{2}}\left[\cos(105+120k) + i\,\text{sen}(105+120k)\right]$$

$$\boxed{\begin{aligned} z_0 &\cong -0{,}23 + 0{,}86\,i \\ z_1 &\cong -0{,}63 - 0{,}63\,i \\ z_2 &\cong 0{,}86 - 0{,}23\,i \end{aligned}}$$



Las respuestas particulares se calculan dándole valores a k

$k=0 \quad z_0 = \sqrt[6]{\frac{1}{2}}\ \text{cis } 105^\circ$

$z_0 = \sqrt[6]{\frac{1}{2}} \cos 105^\circ + \sqrt[6]{\frac{1}{2}} \text{ sen } 105^\circ\, i$

$k=1 \quad z_1 = \sqrt[6]{\frac{1}{2}}\ \text{cis } 225^\circ$

$z_1 = \sqrt[6]{\frac{1}{2}} \cos 225^\circ + \sqrt[6]{\frac{1}{2}} \cdot \text{sen } 225^\circ\, i$

$k=2 \quad z_2 = \sqrt[6]{\frac{1}{2}}\ \text{cis } 345^\circ$

$z_2 = \sqrt[6]{\frac{1}{2}} \cos 345^\circ + \sqrt[6]{\frac{1}{2}} \text{ sen } 345^\circ\, i$

$k=3 \quad z_3 = \sqrt[6]{\frac{1}{2}}\ \text{cis } 465^\circ$

Se repiten las respuestas

Las respuestas forman un polígono regular.

Ejemplo 2

$$Z = \sqrt[5]{1}$$

$$|z| \cdot \text{cis}\, W = \sqrt[5]{1 \cdot \text{cis}\, 0^\circ}$$

$$(|z| \cdot \text{cis}\, W)^5 = 1 \cdot \text{cis}\, 0^\circ$$

$$|z|^5 \cdot \text{cis}\, 5W = 1 \cdot \text{cis}\, 0^\circ$$

$$\begin{cases} |z|^5 = 1 \\ 5W = 0^\circ + 360^\circ k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

$$|z| = \sqrt[5]{1} = 1 \Rightarrow \boxed{|z| = 1}$$

$$5W = 0 + 360k \Rightarrow W = \frac{360k}{5}$$

$$\boxed{W = 72^\circ k}$$

1° Pasar a forma trigonométrica
2° Paso la raíz como potencia y resuelvo
3° Igualar los módulos y los ángulos considerando los giros
4° Despejo $|z|$ y W
5° Armo la respuesta general.
6° Todas las respuestas las calculo en forma binómica y trigonométrica.

$$Z = |z| \cdot \text{cis}\, W$$

$$\boxed{Z = 1 \cdot \text{cis}\, 72^\circ k} = 1 \cdot \cos 72k + 1 \cdot \text{Sen}\, 72k\, i$$

$$Z = 1 \cdot cis\, 72^\circ k.$$

$$Z_0 = 1 \cdot cis\, 72^\circ \cdot 0 = 1 \cdot cis\, 0 = 1 \cdot \cos 0 + 1 sen\, 0\, i = 1$$

$$Z_1 = 1 \cdot cis\, 72^\circ \cdot 1 = 1 \cdot \cos 72^\circ + sen\, 72^\circ\, i \cong 0{,}31 + 0{,}95\, i$$

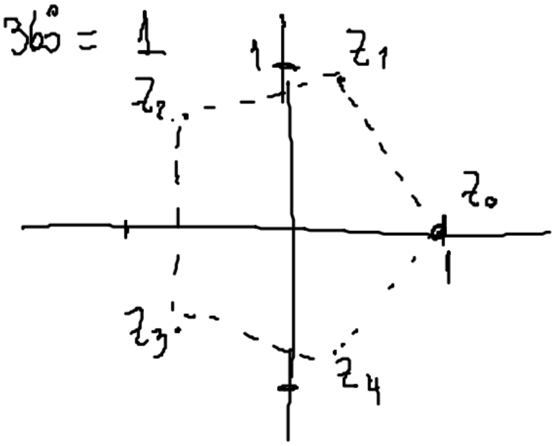
$$Z_2 = 1 \cdot cis\, 72^\circ \cdot 2 = cis\, 144^\circ = \cos 144^\circ + i\, sen\, 144^\circ \cong -0{,}81 + 0{,}59\, i$$

$$Z_3 = 1 \cdot cis\, 72^\circ \cdot 3 = cis\, 216^\circ = \cos 216^\circ + i\, sen\, 216^\circ \cong -0{,}81 - 0{,}59\, i$$

$$Z_4 = 1 \cdot cis\, 72^\circ \cdot 4 = cis\, 288^\circ = \cos 288^\circ + i\, sen\, 288^\circ \cong 0{,}31 - 0{,}95\, i$$

$$Z_5 = 1 \cdot cis\, 72^\circ \cdot 5 = cis\, 360^\circ = \cos 360^\circ + i\, sen\, 360^\circ = 1$$

Se comienzan a repetir.



Conclusions

$z = \sqrt[n]{a+bi}$

- n indica el número de soluciones
- Las soluciones al ser representadas gráficamente y ser unidas determinan un polígono regular de n lados
- Para verificar debo elevar mis respuestas a la $\underline{\underline{n}}$ obteniendo

$$(\ldots\ldots)^n = a+bi$$

- k toma valores desde 0 hasta $n-1$