Bioestadística

Tema 4: Probabilidad (recordatorio)

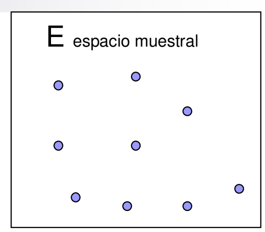
- ¿Cuál es la probabilidad de aprobar Bioestadística?
- ¿Cuál es la probabilidad de no encontrarme un atasco en la N-340 cuando voy a clase?
- Todos los días nos hacemos preguntas sobre probabilidad e incluso los que hayáis visto poco de la materia en cursos anteriores, tenéis una idea intuitiva lo suficientemente correcta para lo que necesitamos de ella en este curso.
- En este tema vamos a:
  - Recordar qué entendemos por probabilidad.
  - Recordar algunas reglas de cálculo.
  - Ver cómo aparecen las probabilidades en CC. Salud.
  - Aplicarlo a algunos conceptos nuevos de interés en CC. Salud.
    - Pruebas diagnósticas.

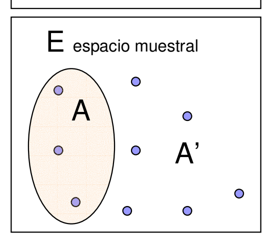
Nociones de probabilidad

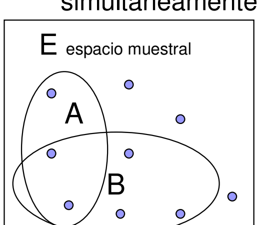
- Hay dos maneras principales de entender la probabilidad:
  - Frecuentista (objetiva): Probabilidad de un suceso es la frecuencia relativa (%) de veces que ocurriría el suceso al realizar un experimento repetidas veces.
  - Subjetiva (bayesiana): Grado de certeza que se posee sobre un suceso. Es personal.
- En ambos tipos de definiciones aparece el concepto de suceso. Vamos a recordar qué son y algunas operaciones que se pueden realizar con sucesos.

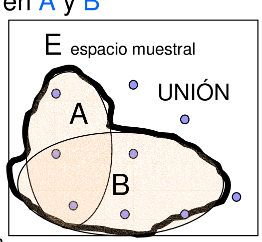
Sucesos

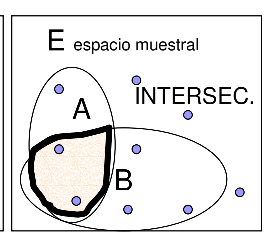
- Cuando se realiza un experimento aleatorio diversos resultados son posibles. El conjunto de todos los resultados posibles se llama espacio muestral (E).
- Se llama suceso a un subconjunto de dichos resultados.
- Se llama suceso contrario (complementario) de un suceso A, A', al formado por los elementos que no están en A
- Se llama suceso unión de A y B, AUB, al formado por los resultados experimentales que están en A o en B (incluyendo los que están en ambos.
- Se llama suceso intersección de A y B, A∩B o simplemente AB, al formado por los resultados experimentales que están simultáneamente en A y B





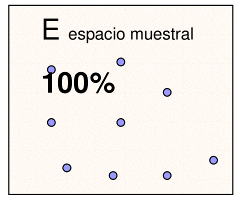


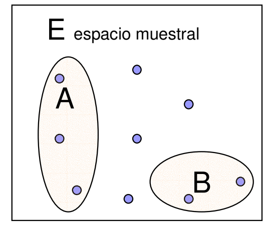




Definición de probabilidad y prob. condicionada

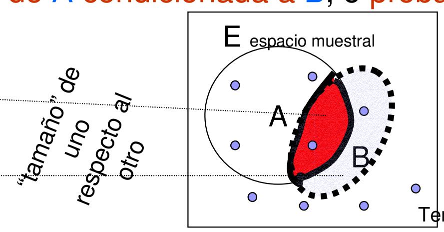
- Se llama probabilidad a cualquier función, P, que asigna a cada suceso A un valor numérico P(A), verificando las siguientes reglas (axiomas)
  - $0 \le P(A) \le 1$
  - $P(E)=1$
  - $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$ si $AB=\varnothing$
    - Ø es el conjunto vacío.



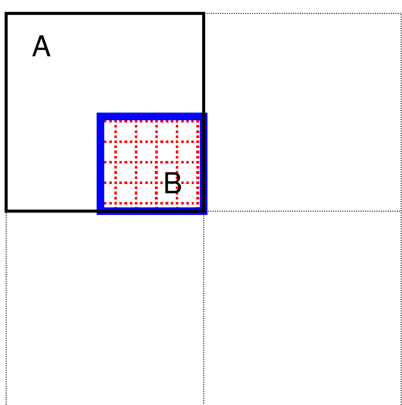


- Se llama probabilidad de A condicionada a B, o probabilidad de A sabiendo que pasa B:

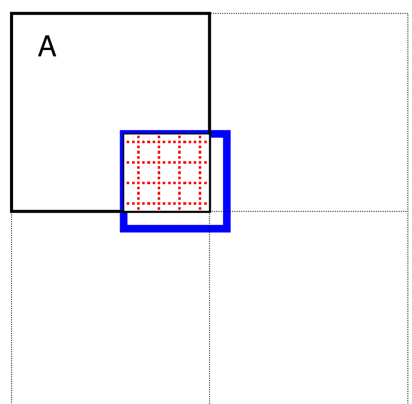
$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$



Intuir la probabilidad condicionada



P(A) = 0,25
P(B) = 0,10
P(AB) = 0,10



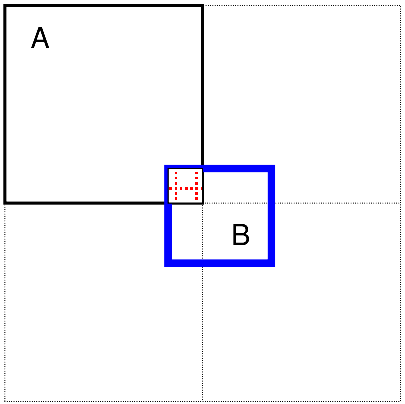
P(A) = 0,25
P(B) = 0,10
P(AB) = 0,08

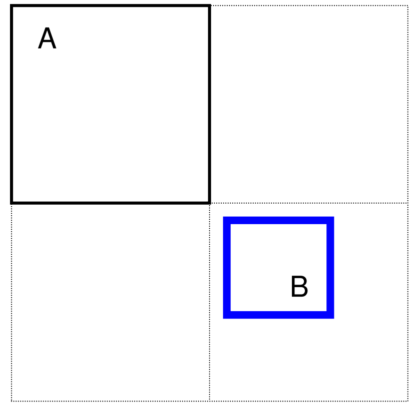
¿Probabilidad de A sabiendo que ha pasado B?

P(A|B)=1

P(A|B)=0,8

Intuir la probabilidad condicionada





P(A) = 0,25
P(B) = 0,10
P(AB) = 0,005

P(A) = 0,25
P(B) = 0,10
P(AB) = 0

¿Probabilidad de A sabiendo que ha pasado B?

P(A|B)=0,05 **P(A|B)=0**

- Cualquier problema de probabilidad puede resolverse en teoría mediante aplicación de los axiomas. Sin embargo, es más cómodo conocer algunas reglas de cálculo:
  - P(A') = 1 - P(A)
  - P(AUB) = P(A) + P(B) - P(AB)
  - P(AB) = P(A) P(B|A)=P(B) P(B|A)
    - Prob. de que pasen A y B es la prob. de A y que también pase B sabiendo que pasó A.
- Dos sucesos son independientes si la el que ocurra uno no añade información sobre el otro. En lenguaje probabilístico:
  - A indep. B ⇔ P(A|B) = P(A)
- Dicho de otra forma:
  - A indep. B ⇔ P(AB) = P(A) P(B)

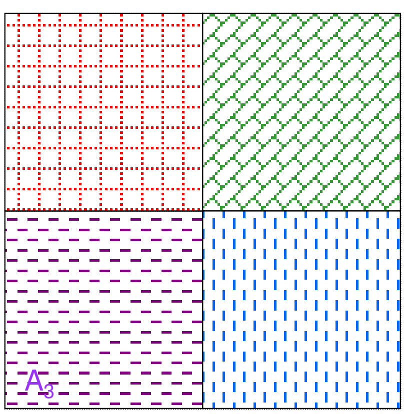
EJEMPLO: En una muestra de 1000 individuos elegidos al azar, entre una población de enfermos de osteoporosis 760 eran mujeres.

- ¿Qué porcentaje de mujeres hay en la muestra?
  - 760/1000=0,76=76%
- Si elegimos a un individuo de la población, qué probabilidad hay de que sea mujer:
  - La noc. frec. de prob. nos permite aproximarlo a P(Mujer)=0'76
- ¿Cuál es la probabilidad de que elegido un individuo de la población sea hombre:
  - P(Hombre)=P(Mujer')=1-0,76=0,24

Se sabe de otros estudios que entre los individuos con osteoporosis, aprox. la cuarta parte de las mujeres fuman y la tercera parte de los hombres. Elegimos a un individuo al azar de la población de enfermos.

- ¿Qué probabilidad hay de que sea mujer fumadora?
  - P(Mujer ∩ Fumar) = P(Mujer) P(Fumar|Mujer) = 0,76 x ¼ = 0,19
- ¿Qué probabilidad hay de que sea un hombre fumador?
  - P(Hombre ∩ Fumar) = P(Hombre) P(Fumar|Hombre) = 0,24 x 1/3 = 0,08

Sistema exhaustivo y excluyente de sucesos

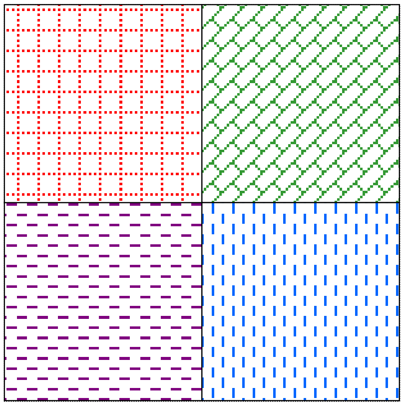


Son una colección de sucesos

A_1, A_2, A_3, A_4…

Tales que la unión de todos ellos forman el espacio muestral, y sus intersecciones son disjuntas.

Divide y vencerás

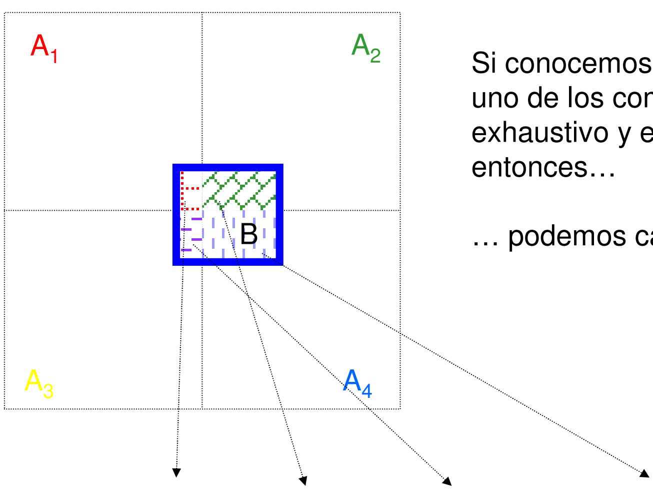


Todo suceso B, puede ser descompuesto en componentes de dicho sistema.

$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) \cup (B \cap A_4)$

Nos permite descomponer el problema B en subproblemas más simples. Creedme . Funciona.

Teorema de la probabilidad total



Si conocemos la probabilidad de B en cada uno de los componentes de un sistema exhaustivo y excluyente de sucesos, entonces…

… podemos calcular la probabilidad de B.

$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) + (B \cap A_4)$

$= P(B|A_1)\, P(A_1) + P(B|A_2)\, P(A_2) + \ldots$

Ejemplo: En este aula el 70% de los alumnos son mujeres. De ellas el 10% son fumadoras. De los varones, son fumadores el 20%.

- ¿Qué porcentaje de fumadores hay en total?
  - $P(F) = P(F \cap H) + P(F \cap M)$

    $= P(F|H)\, P(H) + P(F|M)\, P(M)$

    $= 0{,}2 \times 0{,}3 + 0{,}1 \times 0{,}7$

    $= 0{,}13 = 13\%$

T. Prob. Total.
Hombres y mujeres forman
Un Sist. Exh. Excl.
De sucesos

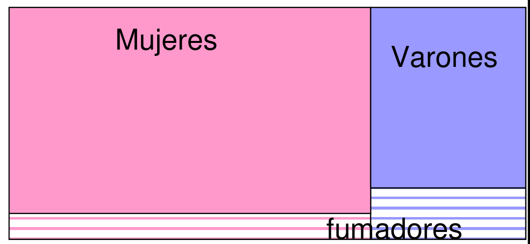
- ¿Se elije a un individuo al azar y resulta fumador. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un hombre?
  - $P(H|F) = P(F \cap H)/P(F)$

    $= P(F|H)\, P(H) / P(F)$

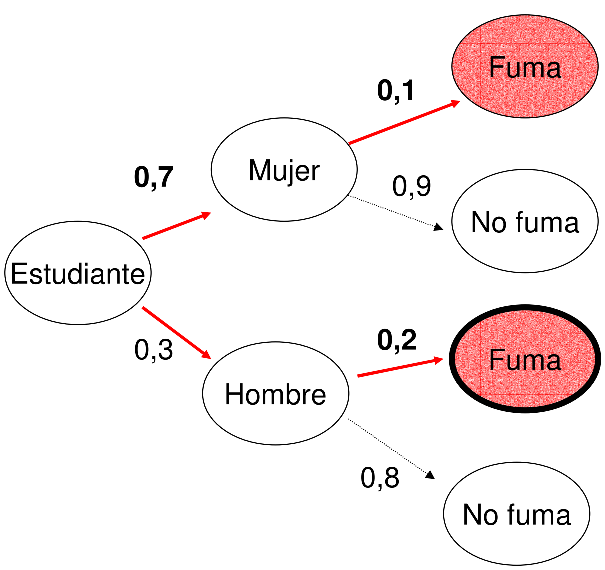
    $= 0x2 \times 0{,}3 / 0{,}13$

    $= 0{,}46 = 46\%$

T. Bayes



Expresión del problema en forma de arbol

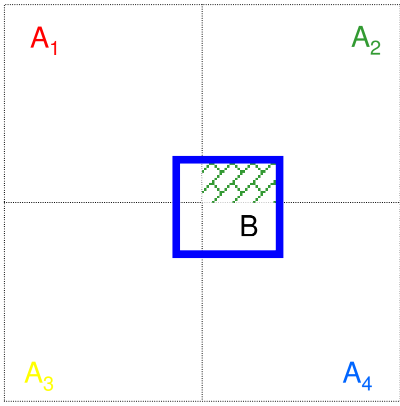


$P(F) = 0{,}7 \times 0{,}1 + 0{,}3 \times 0{,}2$

$P(H \mid F) = 0{,}3 \times 0{,}2/P(F)$

- Los caminos a través de nodos representan intersecciones.
- Las bifurcaciones representan uniones disjuntas.
- Podéis resolver los problemas usando la técnica de vuestra preferencia.

Teorema de Bayes



Si conocemos la probabilidad de B en cada uno de los componentes de un sistema exhaustivo y excluyente de sucesos, entonces…

…si ocurre B, podemos calcular la probabilidad (*a posteriori*) de ocurrencia de cada A_i.

$$\boxed{P(Ai\,|\,B)=\frac{P(B\ Ai)}{P(B)}}$$

donde P(B) se puede calcular usando el teorema de la probabilidad total:

$P(B)=P(B\cap A_1) + P(B\cap A_2) + P(B\cap A_3) + (B\cap A_4)$

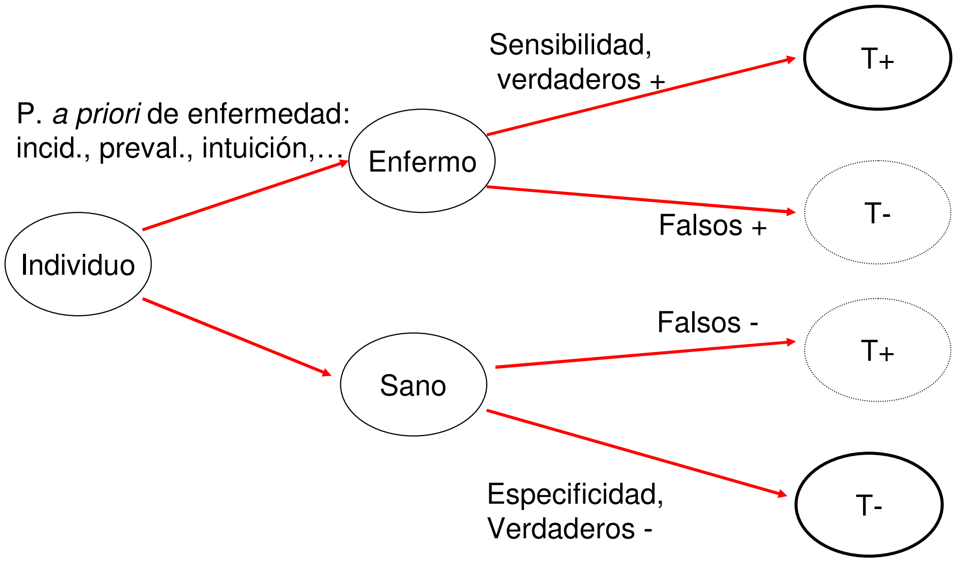
$=P(B|A_1)\ P(A_1) + P(B|A_2)\ P(A_2) + \ldots$

Pruebas diagnósticas

Una prueba diagnóstica sirve para ayudar a mejorar una estimación de la probabilidad de que un individuo presente una enfermedad.

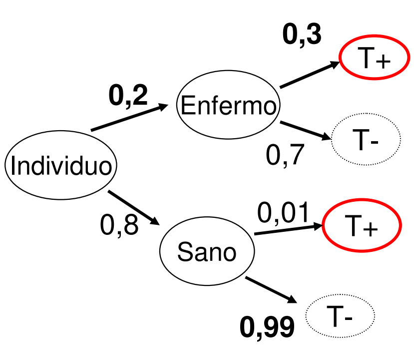
- En pricipio tenemos una idea subjetiva de P(Enfermo). Nos ayudamos de…
  - Incidencia,
    - Porcentaje de nuevos casos de la enfermedad en la población.
  - Prevalencia,…
    - Porcentaje de la población que presenta una enfermedad.
- Por otra parte, para confirmar, usamos una prueba diagnóstica. La misma ha sido evaluada con anterioridad sobre dos grupos de individuos: sanos y enfermos. Así de modo frecuentista se ha estimado:
  - Sensibilidad (verdaderos +)= Tasa de acierto sobre enfermos.
  - Especificidad (verdaderos -)= Tasa de acierto sobre sanos.
- A partir de lo anterior y usando el teorema de Bayes, podemos calcular las probabilidades *a posteriori* (en función de los resultados del test): Índices predictivos
  - P(Enfermo | Test +) = Índice predictivo positivo
  - P(Sano | Test -) = Índice predictivo negativo

Pruebas diagnósticas: aplicación T. Bayes.



Ejemplo: Pruebas diagnóstica y T. Bayes

- La diabetes afecta al 20% de los individuos que acuden a una consulta. La presencia de glucosuria se usa como indicador de diabetes. Su sensibilidad es de 0,3 y la especificidad de 0,99. Calcular los índices predictivos.



$$P(Enf \mid T+) = \frac{P(Enf \cap T+)}{P(Enf \cap T+) + P(Sano \cap T+)}$$

$$= \frac{0{,}2 \cdot 0{,}3}{0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}8 \cdot 0{,}01} = 0{,}88$$

$$P(Sano \mid T-) = \frac{P(Sano \cap T-)}{P(Sano \cap T-) + P(Enf \cap T-)}$$

$$= \frac{0{,}8 \cdot 0{,}99}{0{,}8 \cdot 0{,}99 + 0{,}2 \cdot 0{,}7} = 0{,}85$$

Observaciones

- En el ejemplo anterior, al llegar un individuo a la consulta tenemos una idea *a priori* sobre la probabilidad de que tenga una enfermedad.
- A continuación se le pasa una prueba diagnóstica que nos aportará nueva información: Presenta glucosuria o no.
- En función del resultado tenemos una nueva idea (*a posteriori*) sobre la probabilidad de que esté enfermo.
  - Nuestra opinión a priori ha sido modificada por el resultado de un experimento.
  - Relaciónalo con el método científico.

-¿Qué probabilidad tengo de estar enfermo?

- En principio un 20%. Le haremos unas pruebas.

- Presenta glucosuria. La probabilidad ahora es del 88%.

¿Qué hemos visto?

- Álgebra de sucesos
  - Unión, intersección, complemento
- Probabilidad
  - Nociones
    - Frecuentista
    - Subjetiva o Bayesiana
  - Axiomas
  - Probabilidad condicionada
  - Reglas de cálculo
    - Complementario, Unión, Intersección
  - Independencia de sucesos
  - Sistema exhaustivo y excluyente de sucesos
    - Teorema probabilidad total.
    - Teorema de Bayes
      - Pruebas diagnósticas
        - *A priori*: Incidencia, prevalencia.
        - Eficacia de la prueba: Sensibilidad, especificidad.
        - *A posteriori*: Índices predictivos.