***TRIGONOMETRIA***

La palabra trigonometría proviene del griego: trigonos (triángulo) y metria (medida). En sus orígenes esta rama de la matemática se utilizó para resolver problemas de agrimensura y astronomía, pero con el desarrollo de la ciencia se ha convertido en un instrumento indispensable en la física, la ingeniería, la medicina y todo otro proceso en el que se encuentren comportamientos que se repiten cíclicamente. Sirve para estudiar fenómenos vibratorios, como por ejemplo la luz, el sonido, la electricidad., etc.

Clasificación de los triángulos

Los triángulos se pueden clasificar por la longitud de sus lados o por la amplitud de sus ángulos.

**Por la longitud de sus lados**

Por la longitud de sus lados, los triángulos se clasifican en:

* [**Triángulo equilátero**](http://es.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A1ngulo_equil%C3%A1tero): si sus tres lados tienen la misma longitud (los tres [ángulos](http://es.wikipedia.org/wiki/%C3%81ngulo) internos miden 60 [grados](http://es.wikipedia.org/wiki/Grado_sexagesimal) ó  [radianes](http://es.wikipedia.org/wiki/Radi%C3%A1n).)
* [**Triángulo isósceles**](http://es.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A1ngulo_is%C3%B3sceles): si tiene dos lados de la misma longitud. Los ángulos que se oponen a estos lados tienen la misma medida.
* [**Triángulo escaleno**](http://es.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A1ngulo_escaleno): si todos sus lados tienen longitudes diferentes. En un triángulo escaleno no hay ángulos con la misma medida.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Triángulo Equilátero | Triángulo Isósceles | Triángulo Escaleno |
| Equilátero | Isósceles | Escaleno |

**Por la amplitud de sus ángulos**

Por la amplitud de sus ángulos, los triángulos se clasifican en:

* [**Triángulo rectángulo**](http://es.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A1ngulo_rect%C3%A1ngulo): si tiene un ángulo interior recto (90°). A los dos lados que conforman el ángulo recto se les denomina *catetos* y al otro lado *hipotenusa*.
* [**Triángulo obtusángulo**](http://es.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A1ngulo_obtus%C3%A1ngulo) : si uno de sus ángulos es obtuso (mayor de 90°); los otros dos son agudos (menor de 90°).
* [**Triángulo acutángulo**](http://es.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A1ngulo_acut%C3%A1ngulo): cuando sus tres ángulos son menores a 90°; el triángulo equilátero es un caso particular de triángulo acutángulo.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Triángulo Rectángulo | Triángulo Obtusángulo | Triángulo Acutángulo |
| Rectángulo | Obtusángulo | Acutángulo |
|  | \underbrace{\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad}_{} |
|  | Oblicuángulos |

Se llama triángulo oblicuángulo cuando ninguno de sus ángulos interiores son rectos (90°). Por ello, los triángulos obtusángulos y acutángulos son oblicuángulos.

**Clasificación según los lados y los ángulos**

Los triángulos acutángulos pueden ser:

* **Triángulo acutángulo isósceles**: con todos los ángulos agudos, siendo dos iguales, y el otro distinto, este triángulo es simétrico respecto de su altura.
* **Triángulo acutángulo escaleno**: con todos sus ángulos agudos y todos diferentes, no tiene eje de simetría.
* **Triángulo acutángulo equilátero**: sus tres lados y sus tres ángulos son iguales; las tres alturas son ejes de simetría (dividen al triángulo en dos triángulos iguales).

Los triángulos rectángulos pueden ser:

* **Triángulo rectángulo isósceles**: con un ángulo recto y dos agudos iguales (de 45° cada uno), dos lados son iguales y el otro diferente: los lados iguales son los catetos y el diferente es la hipotenusa. Es simétrico respecto a la altura de la hipotenusa, que pasa por el ángulo recto.
* **Triángulo rectángulo escaleno**: tiene un ángulo recto, y todos sus lados y ángulos son diferentes.

Los triángulos obtusángulos pueden ser:

* **Triángulo obtusángulo isósceles**: tiene un ángulo obtuso, y dos lados iguales que son los que forman el ángulo obtuso; el otro lado es mayor que éstos dos.
* **Triángulo obtusángulo escaleno**: tiene un ángulo obtuso y todos sus lados son diferentes.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Triángulo** | [equilátero](http://es.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A1ngulo_equil%C3%A1tero) | [isósceles](http://es.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A1ngulo_is%C3%B3sceles) | [escaleno](http://es.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A1ngulo_escaleno) |
| acutángulo | Triángulo equilátero.svg | Triángulo acutángulo isósceles.svg | Triángulo acutángulo escaleno.svg |
| rectángulo |  | Triángulo rectángulo isósceles.svg | Triángulo rectángulo escaleno.svg |
| obtusángulo |  | Triángulo obtusángulo isósceles.svg | Triángulo obtusángulo escaleno.svg |

**Sistemas de medición de ángulos**

Para medir ángulos pueden adoptarse distintas unidades. Los sistemas más usados son

* Sistema sexagesimal, cuya unidad de medida angular es el *grado sexagesimal*, que es la noventa-ava parte del ángulo recto y se simboliza 1º. La sesenta-ava parte de un grado es un minuto (1’) y la sesenta-ava parte de un minuto es un segundo (1”).



Un ángulo llano mide 180º y un giro completo mide 360º.

* Sistema circular o radial, cuya unidad de medida es el radián. La proporcionalidad que existe entre la longitud *s* de los arcos de dos circunferencias concéntricas cualesquiera determinados por un ángulo central α y los radios *r* correspondientes, permite tomar como medida del ángulo el cociente  . Un ángulo central de 1 radián es aquel que determina un arco que tiene una longitud igual al radio.

*s*3

*s*1

*s*2

α

*r*2

*r*3

*r*1

*s* = *r*, por lo tanto .

*Un* ***radián*** *es la medida del ángulo con vértice en el centro de la circunferencia y cuyos lados determinan sobre ella un arco s de longitud igual al radio r .*

Ejemplo: Si β determina un arco de 6 cm en una circunferencia de 2 cm de radio, entonces la medida en radianes de β es: . En el sistema circular, β mide 3 radianes, o decimos que mide 3, sin indicar la unidad de medida.

La medida en radianes de un ángulo de un giro es .

La medida en radianes de un ángulo llano, que es la mitad de un giro, es 

La medida en radianes de un ángulo recto es .

Para relacionar un sistema de medición con otro, observamos la siguiente tabla:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Ángulo | Sistema sexagesimal | Sistema circular |
| 1 giro | 360º | 2 π |
| llano | 180º | π |
| recto | 90º | π/2 |

¿A cuántos grados sexagesimales equivale un radián?

Haciendo uso de las proporciones y teniendo en cuenta la medida del ángulo llano, tenemos

 π 180º

 1 

***Nota:*** *π es aproximadamente igual a 3,14. Un ángulo de π radianes* ***equivale*** *a un ángulo de 180º. Pero* π **≠ 180.**

**Razones trigonométricas de un ángulo agudo**

Recordemos las definiciones de las razones trigonométricas.

C

α

B

A

 



**Observación:** Estas razones dependen sólo del ángulo α y no de las medidas de los lados del triángulo construido.

Las definiciones de las razones trigonométricas de ángulos agudos pueden extenderse para cualquier ángulo. Para eso, consideramos el ángulo α en el plano cartesiano, haciendo coincidir su vértice con el origen de un sistema cartesiano ortogonal, y su lado inicial con el semieje positivo de las *x* .

*y*0

P

r

α

*x*0

*x*0

P

*y*0

r

α





 si *x*0 ≠ 0

También definimos las **razones trigonométricas recíprocas** de las anteriores, llamadas cosecante, secante y cotangente:



**Nota:** Las fórmulas anteriores son válidas cuando no se anulen los denominadores.

También se verifican las siguientes relaciones

****

Ejemplo:, queremos determinar los valores de las relaciones trigonométricas de un ángulo α cuyo lado terminal pasa por el punto P = (−3 , 4)

4

*y*

*r*

α

-3

*x*

*x*0 = −3, *y*0 = 4

*r* =

P

*sen* α =; *cos* α =; *tg* α =

*cosec* α =; *sec* α =; *cotg* α =

Para un ángulo cualquiera, puede aplicarse el teorema de Pitágoras:

(cat. op.)2 + (cat. ady.)2 = (hipotenusa)2

P

*y*0

*x*0

α

Dividimos ambos miembros por (hipotenusa)2:





Resulta, entonces:

(*sen* α)2 + (*cos* α)2 = 1

donde por comodidad escribimos ***sen* 2 α + *cos* 2 α = 1** y que llamamos **identidad pitagórica**.

Esta identidad, por ejemplo, nos permite calcular las funciones trigonométricas de un ángulo α sabiendo que es agudo y que *sen* α =.

Entonces, si *sen*2 α + *cos*2 α = 1 ⇒ *cos*2 α = 1 − *sen*2 α ⇒ ⏐*cos* α⏐ =

y como α < π/2 , ⏐*cos* α⏐ = *cos* α ⇒ *cos* α =.

 *tg* α =; *cosec* α =

 *cotg* α =; *sec* α =

**La circunferencia trigonométrica – Ángulos orientados**

Cuando trabajamos en radianes, las medidas de los ángulos son números reales. Si definimos ángulos orientados esta medida puede tomar valores negativos. Al trabajar con un ángulo en un sistema de coordenadas cartesianas, éste está generado por la rotación de una semirrecta o rayo que parte del semieje positivo de las *x*.

Si el lado gira en sentido contrario a las agujas del reloj, se dice que el ángulo es **positivo**. Y es **negativo** cuando está generado en sentido horario.

Puede, además, realizar más de un giro completo.

Para referirnos a su ubicación, consideramos el plano cartesiano divido en cuatro sectores, llamados **cuadrantes** y una circunferencia con centro en el origen y radio 1 que llamaremos **circunferencia trigonométrica**.

I cuadrante

II cuadrante

 P1

III cuadrante

IV cccuacuadrante

P0

P2

P3

α

β

γ

δ

P1

En la figura, como *r* = 1 tenemos que:

 ⇒ el segmento de ordenadas está relacionado con el *sen* α .

 ⇒ el segmento de abscisas está relacionado con el  α

Para hallar el segmento asociado al *sen* β, se construye en el segundo cuadrante el triángulo rectángulo con las componentes de P1 y el segmento de ordenadas corresponde a seno de β. Análogamente sucede con los ángulos del tercer y cuarto cuadrante, donde el segmento de ordenada se asocia con el seno del ángulo y el segmento de abscisa, con el coseno del ángulo.

Los signos de los valores de las relaciones trigonométricas de los distintos cuadrantes dependen de los signos de las coordenadas del punto sobre el lado terminal del ángulo.

Esta información se resume en la siguiente tabla, que se debe completar:

**Actividad:**

a)

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *sen* α | *cos* α | *tg* α | *cosec* α | *sec* α | *cotg* α |
| I | + | + | + |  |  |  |
| II |  | − |  |  |  |  |
| III |  |  |  |  | − |  |
| IV | − |  |  |  |  |  |

b) Si π < β < 5π , ¿qué se puede asegurar respecto del signo de *sen* β , *cos* β y *tg* β?