

María Teresa Blaconá

Instituto de Investigaciones Teóricas y Aplicadas, Escuela de Estadística

ANÁLISIS DE SERIES DE TIEMPO MULTIVARIADAS CON MODELOS DE ESPACIO DE ESTADO - UN EJEMPLO: PRODUCTO BRUTO Y DEMANDA GLOBAL DE LA REPÚBLICA ARGENTINA

1. INTRODUCCIÓN

Las series de tiempo de muchos ejemplos empíricos consisten en las observaciones a través del tiempo de varias variables relacionadas. Por ejemplo, el estudio de las series de producto bruto y demanda global (suma de consumo, inversiones y exportaciones).

Cuando interesa describir las relaciones entre variables de varias series de tiempo se deben introducir modelos de series de tiempo vectoriales.

En la literatura actual existen principalmente dos tipos de modelos multivariados de Series Temporales: los **Modelos vectoriales autorregresivos - promedios móviles (VAR-MA)**, introducidos por Box-Jenkins(1976) y los **Modelos de Espacio de los Estados**, estudiados especialmente por Harvey(1981). En este trabajo se presentan las nociones y conceptos básicos de este último y se ilustra a través del ejemplo mencionado anteriormente.

2. CARACTERÍSTICA DE SERIES DE TIEMPO MULTIVARIADAS

En primer lugar se introducen las principales características que se definen a partir de series de tiempo multivariadas.

2.1. Funciones Matriciales de covariancia y correlación

Sea $\mathbf{Z}_t = [Z_{1,t}, Z_{2,t}, \dots, Z_{m,t}]'$, $t=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, un proceso vectorial a valores reales estacionario m -dimensional con media $E(Z_{i,t}) = \mu_i$ constante para cada $i = 1, 2, \dots, m$, y covariancia cruzada entre $Z_{i,t}$ y $Z_{j,s}$, para todo $i = 1, 2, \dots, m$ y $j = 1, 2, \dots, m$ una función que sólo depende de la diferencia de tiempo $(s-t)$. El vector de medias es

$$E(\mathbf{Z}_t) = \boldsymbol{\mu}$$

y la matriz de covariancia

$$\Gamma(k) = \text{Cov}(\mathbf{Z}_t, \mathbf{Z}_{t+k}) = E[(\mathbf{Z}_t - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{Z}_{t+k} - \boldsymbol{\mu})'] = \text{Cov}(\mathbf{Z}_t, \mathbf{Z}_{t+k}),$$

donde cada elemento de la matriz está dado por

$$\gamma_{ij}(k) = E[(Z_{i,t} - \mu_i)(Z_{j,t+k} - \mu_j)] = E[(Z_{i,t+k} - \mu_i)(Z_{j,t} - \mu_j)], \text{ para } k=0, \pm 1, \pm 2, \dots, i=1, 2, \dots, m, \text{ y } j=1, 2, \dots, m.$$

$\Gamma(k)$ es función de k y se la llama **función matricial de covariancia** para el proceso vectorial \mathbf{Z}_t .

Para $i=j$, $\gamma_{i,i}(k)$ es la función de autocovariancia para el i -ésimo componente del proceso $Z_{i,t}$, para $i \neq j$, $\gamma_{i,j}(k)$ es la función de covariancia cruzada entre $Z_{i,t}$ y $Z_{j,t}$. La matriz $\Gamma(0)$ es la matriz de variancia y covariancia del proceso.

Si el proceso es conjuntamente estacionario entonces lo son los procesos univariados, la recíproca no es siempre cierta.

La **función matricial de correlación** del proceso vectorial se define como

$$\rho(k) = D^{-1/2} \Gamma(k) D^{-1/2} = [\rho_{ij}(k)], \text{ para } i=1, \dots, m \text{ y } j=1, \dots, m,$$

D: matriz diagonal donde el i-ésimo elemento de la diagonal es la variancia del proceso i.

El i-ésimo elemento de la diagonal de $\rho(k)$, es la función de autocorrelación de la i-ésima serie $Z_{i,t}$, y el elemento (i,j) de fuera de la diagonal representa la función de correlación cruzada entre $Z_{i,t}$ y $Z_{j,t}$,

Las funciones matriciales de covariancia y de correlación son semidefinidas positivas, también cumplen que $\Gamma(k) = \Gamma'(-k)$ y que $\rho(k) = \rho'(-k)$.

2.2. Función matricial de correlación muestral

Dadas las series de tiempo vectoriales Z_1, Z_2, \dots, Z_n , se puede calcular la función matricial de correlación muestral

$$\hat{\rho}(k) = [\hat{\rho}_{ij}(k)],$$

donde $\hat{\rho}_{ij}(k)$ es la correlación cruzada muestral de las i-ésima y j-ésima series

$$\hat{\rho}_{ij}(k) = \left[\sum_{t=1}^{n-k} (Z_{i,t+k} - \bar{Z}_i)(Z_{j,t} - \bar{Z}_j) \right] / \left[\sum_{t=1}^{n-k} (Z_{i,t+k} - \bar{Z}_i)^2 \sum_{t=1}^{n-k} (Z_{j,t} - \bar{Z}_j)^2 \right]^{1/2}$$

donde \bar{Z}_i y \bar{Z}_j son las medias muestrales de las series correspondientes.

Para procesos vectoriales estacionarios, Hannan(1970) mostró que $\rho_{ij}(k)$ es un estimador consistente y que se distribuye asintóticamente normal. La variancia y covariancia de esta correlación muestral la obtuvo Bartlett(1966). Si $\rho_{ij}(k)=0$ para

$|k| > q$ para alguna q, entonces

$$\text{Var}[\hat{\rho}_{ij}(k)] \cong 1/(n-k) \left[1 + 2 \sum_{s=1}^q \rho_{i,i}(s) \rho_{j,j}(s) \right], |k| > q.$$

Cuando las series Z_t son ruido blanco, la aproximación de Bartlett para la covariancia asintótica es

$$\text{Cov}[\hat{\rho}_{ij}(k) \hat{\rho}_{ij}(k+s)] \cong 1/(n-k)$$

y

$$\text{Var}[\hat{\rho}_{ij}(k)] \cong 1/(n-k).$$

Para muestras grandes, en las expresiones anteriores, a menudo se reemplaza (n-k) por n.

Cuando la dimensión del vector crece las matrices y gráficos de la función matricial de correlación muestral son complejos, para aliviar el problema, Tiao y Box(1981) introducen un método muy conveniente de resumir la correlación muestral. Este método a cada posición (i,j) de la matriz de correlación muestral, asigna los símbolos:

- + si el valor es mayor que 2 veces el desvío estándar de los errores,
- si el valor es menor que 2 veces el desvío estándar de los errores,
- . si el valor está entre 2 veces el desvío estándar de los errores.

2.3. Matrices de autocorrelación parcial

En el caso univariado la correlación entre Z_t y Z_{t+k} después que se ha eliminado la dependencia lineal mutua sobre las variables intervinientes $Z_{t+1}, Z_{t+2}, \dots, Z_{t+k-1}$ es

$$\hat{\phi}_{kk} = \text{Cov}[(Z_t - \bar{Z}_t)(Z_{t+k} - \bar{Z}_{t+k})] / [\text{Var}(Z_t - \bar{Z}_t)(Z_{t+k} - \bar{Z}_{t+k})]^{1/2},$$

donde \bar{Z}_t y \bar{Z}_{t+k} son los estimadores de regresión lineal con error cuadrático medio mínimo basados sobre $Z_{t+1}, Z_{t+2}, \dots, Z_{t+k-1}$.

Para encontrar la función matricial de correlación parcial se generalizan las ecuaciones de Yule-Walker en forma no normalizada:

$$\begin{bmatrix} \Gamma(0) & \Gamma'(1) & \dots & \Gamma'(s-1) \\ \Gamma(1) & \Gamma(0) & \dots & \Gamma'(s-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Gamma(s-1) & \Gamma(s-2) & \dots & \Gamma(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi'_{s,1} \\ \Phi'_{s,2} \\ \dots \\ \Phi'_{s,s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma(1) \\ \Gamma(2) \\ \dots \\ \Gamma(s) \end{bmatrix}$$

Box y Tiao definen la función matricial de correlación parcial $\mathbf{P}(s)$ que se encuentra resolviendo las ecuaciones anteriores llegando a que:

$$\mathbf{P}(s) = \Gamma'(1) [\Gamma(0)]^{-1}, \quad \text{para } s=1,$$

$$\mathbf{P}(s) = \{\Gamma'(s) - \mathbf{c}'(s)[\mathbf{A}(s)]^{-1}\mathbf{b}(s)\}[\Gamma(0) - \mathbf{b}'(s) [\mathbf{A}(s)]^{-1} \mathbf{b}(s)], \quad \text{para } s>1.$$

Donde

$$\mathbf{A}(s) = \begin{bmatrix} \Gamma(0) & \Gamma'(1) & \dots & \Gamma'(s-1) \\ \Gamma(1) & \Gamma(0) & \dots & \Gamma'(s-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Gamma(s-1) & \Gamma(s-2) & \dots & \Gamma(0) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b}(s) = \begin{bmatrix} \Gamma'(s-1) \\ \Gamma'(s-2) \\ \dots \\ \Gamma'(1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}(s) = \begin{bmatrix} \Gamma(1) \\ \Gamma(2) \\ \dots \\ \Gamma(s-1) \end{bmatrix}.$$

3. MODELO DE ESPACIO DE LOS ESTADOS

Para analizar un conjunto de series multivariadas se pueden utilizar modelos de Espacio de los Estados.

La representación como espacio de los estados de un sistema es un concepto fundamental en la teoría moderna de control. El estado de un sistema se define como el conjunto mínimo de información del presente y el pasado, tal que el comportamiento futuro del siste-

ma puede ser completamente descripto por el conocimiento del estado presente y la entrada futura.

Un sistema puede representarse por la ecuación de estado

$$\mathbf{Y}_{t+1} = \mathbf{A} \mathbf{Y}_t + \mathbf{G} \mathbf{X}_{t+1}$$

y la ecuación de salida

$$\mathbf{Z}_t = \mathbf{H} \mathbf{Y}_t,$$

donde \mathbf{Y}_t es un vector de estado de dimensión k , \mathbf{A} es una matriz de transición $k \times k$, \mathbf{G} es una matriz de entrada $k \times n$, \mathbf{X}_t es un vector $n \times 1$ de entrada del sistema, \mathbf{Z}_t es un vector $m \times 1$ de salida y \mathbf{H} es una matriz $m \times k$ de observaciones o de salida.

Si los procesos de entrada \mathbf{X}_t y de salida \mathbf{Z}_t son estocásticos, la representación de espacio de los estados esta dada por

$$\mathbf{Y}_{t+1} = \mathbf{A} \mathbf{Y}_t + \mathbf{G} \mathbf{a}_{t+1}$$

$$\mathbf{Z}_t = \mathbf{H} \mathbf{Y}_t + \mathbf{b}_t, \quad (3.1)$$

donde

$\mathbf{a}_{t+1} = \mathbf{X}_{t+1} - E(\mathbf{X}_{t+1} \mid \mathbf{X}_t, t \leq n)$ es el vector $n \times 1$ de error de pronósticos una etapa hacia adelante del proceso de entrada \mathbf{X}_t , y \mathbf{b}_t es un vector $m \times 1$ de disturbios que se suponen independientes de \mathbf{a}_t . El vector \mathbf{a}_{t+1} se conoce también como las innovaciones de la entrada \mathbf{X}_t en el momento $(t+1)$.

Cuando $\mathbf{Z}_t = \mathbf{X}_t$, \mathbf{b}_t desaparece de la fórmula (III. 1) y la representación de un proceso estocástico estacionario se vuelve

$$\mathbf{Y}_{t+1} = \mathbf{A} \mathbf{Y}_t + \mathbf{G} \mathbf{a}_{t+1}$$

$$\mathbf{Z}_t = \mathbf{H} \mathbf{Y}_t. \quad (III. 2)$$

La ecuación de estado se llama también la ecuación del sistema o ecuación de transición, y la ecuación de salida se la conoce también como la ecuación de medidas o la ecuación de las observaciones.

Existe una relación directa entre un modelo de espacio de los estados y los modelos VARMA. Dado el vector de estados $\{\mathbf{Z}_t, \mathbf{Z}_{t+1/t}, \dots, \mathbf{Z}_{t+p-1/t}\}$ la representación del espacio de los estados de un modelo VARMA(p,q) esta dado por:

$$\begin{bmatrix} Z_{t+1/t+1} \\ Z_{t+2/t+1} \\ \dots \\ Z_{t+p-1/t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & I \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_p & \phi_{p-1} & \dots & \phi_1 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_t \\ Z_{t+1/t} \\ \dots \\ Z_{t+p-2/t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ \Psi_1 \\ \dots \\ \Psi_{p-1} \end{bmatrix} a_{t+1}$$

y

$$Z_t = [I_m \quad 0 \dots 0] \begin{bmatrix} Z_t \\ Z_{t+1/t} \\ \dots \\ Z_{t+p-1} \end{bmatrix}.$$

En la representación anterior los primeros m componentes de vector de estado son igual a Z_t .

Por otro lado la representación VARMA(p, q) de un modelo de espacio de los estados viene dada por

$$Z_{t+p} + \phi_1 Z_{t+p-1} + \dots + \phi_p Z_t = H(A^p + \phi_1 A^{p-1} + \dots + \phi_p I) Y_t + H(A^{p-1} + \phi_1 A^{p-2} + \dots + \phi_{p-1} I) G a_{t+1} + \dots + H G a_{t+p} = \Theta_0 a_{t+p} + \Theta_1 a_{t+p-1} + \dots + \Theta_{p-1} a_{t+1} \Theta_1 a_{t+p-1},$$

$$\text{donde } H(A^p + \phi_1 A^{p-1} + \dots + \phi_p I) Y_t = 0 \text{ y } \Theta_i = H(A^i + \phi_1 A^{i-1} + \dots + \phi_i I) G.$$

Es un modelo VARMA porque los primeros m componentes del vector de estado son iguales a Z_t .

4. AJUSTE DE MODELOS DE ESPACIO DE LOS ESTADOS Y ANÁLISIS DE CORRELACIONES CANÓNICAS.

La representación de espacio de los estados no es única. Por ejemplo, se puede formar un nuevo vector de estados $V_t = M Y_t$ para cualquier matriz no singular M y obtener una nueva representación de espacio de estados

$$V_{t+1} = A_1 V_t + G_1 a_{t+1}$$

y

$$Z_t = H_1 V_t,$$

donde $A_1 = M A M^{-1}$, $G_1 = M G$ y $H_1 = H M^{-1}$. Sin embargo a través de la representación canónica se puede obtener una única solución. En la representación de correlación canónica, el vector de estado se determina unívocamente a través del análisis de correlación canónica entre el conjunto de observaciones actuales y pasadas (Z_n, Z_{n-1}, \dots) y el conjunto de valores actuales y futuros ($Z_n, Z_{n+1/n}, \dots$). En términos de un modelo AR(p), como la eventual función de pronósticos se determina por el polinomio AR y ($Z_n, Z_{n-1}, \dots, Z_{n-p}$), contiene esencialmente toda la información relevante para los valores futuros del proceso, el análisis de correlación canónica es simplemente desarrollado entre el espacio de los datos

$$D_n = (Z_n, Z_{n-1}, \dots, Z_{n-p})$$

y el espacio predictor

$$\mathbf{F}_n = (Z_n, Z_{n+1/n}, \dots, Z_{n+p/n}).$$

Si se considera la matriz en bloque de Hankel de la covariancia entre $\mathbf{D}_n = (Z_n, Z_{n-1}, \dots, Z_{n-p})$ y $\mathbf{F}_n = (Z_n, Z_{n+1/n}, \dots, Z_{n+p/n})$ definida por

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma(0) & \Gamma(1) & \dots & \Gamma(p) \\ \Gamma(1) & \Gamma(0) & \dots & \Gamma(p+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Gamma(p) & \Gamma(p+1) & \dots & \Gamma(2p) \end{bmatrix},$$

donde se usa la propiedad de esperanza condicional y el hecho que $\text{Cov}(Z_{n-i}, Z_{n+j/n}) = \text{Cov}(Z_{n-i}, Z_{n+j})$. Akaike(1976) muestra que bajo el supuesto de no singularidad de $\Gamma(0)$, para un modelo vectorial ARMA general, el rango de Γ es igual a la dimensión del vector de estado y así también es igual al número de correlaciones canónicas no nulas entre \mathbf{D}_n y \mathbf{F}_n .

Cuando se desconoce el modelo el orden p se obtiene a través del ajuste óptimo de los datos, basado en el criterio de Akaike AIC, el cual se define como

$$\text{AIC} = n \ln |\Sigma_p| + 2pm^2,$$

donde n es el número de observaciones,

$|\Sigma_p|$ = determinante de la matriz de covariancia para las innovaciones o series ruido blanco en el ajuste del modelo AR(p), y

m = dimensiones de los procesos vectoriales \mathbf{Z}_t .

Se elige el orden óptimo p del modelo AR como aquel que hace mínimo a AIC. Así el análisis de correlaciones canónicas estará basado en la matriz en bloque de Hankel de las covariancias muestrales Γ , donde $\Gamma(j)$, $j=0,1,\dots, 2p$ son las matrices de covariancia muestrales definidas en la Sec. II.

Como los componentes de un vector de predicción $\mathbf{Z}_{n+i/n}$ pueden ser linealmente dependientes, el análisis de correlaciones canónicas se desarrolla entre todos los componentes del espacio de los datos

$$\mathbf{D}_n = (Z_{1,n}, Z_{2,n}, \dots, Z_{m,n}, Z_{1,n-1}, Z_{2,n-1}, \dots, Z_{m,n-1}, \dots, Z_{1,n-p}, Z_{2,n-p}, \dots, Z_{m,n-p})$$

y los componentes del espacio predictor

$$\mathbf{F}_n = (Z_{1,n}, Z_{2,n}, \dots, Z_{m,n}, Z_{1,n+1/n}, Z_{2,n+1/n}, \dots, Z_{m,n+1/n}, \dots, Z_{1,n+p/n}, Z_{2,n+p/n}, \dots, Z_{m,n+p/n}). \quad (\text{IV. 1})$$

Como se conoce que el vector de estado es un subconjunto del espacio predictor, una secuencia de potenciales vectores de estado, \mathbf{Y}_n^j se determina a través del análisis de correlaciones canónicas entre una secuencia \mathbf{F}_n^j de subconjuntos de \mathbf{F}_n , y del espacio de los datos \mathbf{D}_n , basados sobre la submatriz Γ^j formada a partir de las columnas de Γ , las cuales corresponden a los componentes de \mathbf{D}_n y \mathbf{F}_n^j .

Más específicamente, la correlación canónica entre

$\mathbf{Z}_n = [Z_{1,n}, Z_{2,n}, \dots, Z_{m,n}]'$ y \mathbf{D}_n es $1, \dots, 1$, no es cero, el vector de estado actual es el conjunto de \mathbf{Z}_n y el primer subconjunto en la secuencia \mathbf{F}_n^1 es el conjunto de $[Z_{1,n}, Z_{2,n}, \dots, Z_{m,n}, Z_{1,n+1/n}]'$. Si se determina que la correlación canónica más chica de Γ^1 es cero, entonces una combinación lineal de \mathbf{F}_n^1 está no correlacionada con el espacio de datos, los componentes $Z_{1,n+1/t}$ y cualquier $Z_{1,n+i/t}$ son excluidos sin más consideración de los componentes del vector de estado. Si la correlación canónica más chica no es cero, entonces $Z_{1,n+1/n}$ se suma al vector de estado actual. La secuencia \mathbf{F}_n^j se generaliza sumando al vector de estado actual el próximo componente de \mathbf{F}_n que no corresponde al componente que previamente ha fallado para ser incluido en el vector de estado. Se calcula la correlación canónica más chica de Γ^j y se realiza el test para probar si es significativa. Si no es cero, el componente se suma al vector de estado. En caso contrario, el componente se excluye del vector de estado actual y también de cualquier otra consideración. La selección del vector de estado se completa cuando no se pueden adicionar elementos de \mathbf{F}_n al vector de estado actual.

Para cada etapa en la secuencia del análisis de correlaciones canónicas, la significación de la correlación canónica más chica, llamada ρ_{\min} , se basa en el siguiente criterio de información de Akaike:

$$C = -n \ln(1 - \rho_{\min}^2) - 2[m(p+1) - q + 1],$$

donde q es la dimensión de \mathbf{F}_n^j de la etapa actual. Si $C < 0$, ρ_{\min} se toma como cero, en caso contrario se toma como más grande que cero. Para realizar el test de significación de la correlación canónica ρ , se puede usar también la aproximación del test χ^2 dado por Bartlett(1941), quien mostró que bajo la hipótesis de correlación canónica nula, la estadística

$$\chi^2 = -(n-1)/2[m(p+1) + q + 1] \ln(1 - \rho^2)$$

tiene una distribución aproximadamente chi cuadrado con $[m(p+1) - q + 1]$ grados de libertad.

Una vez que se identificó el vector de estado, se tiene la representación canónica del modelo de espacio de los estados

$$\mathbf{Y}_{t+1} = \mathbf{A} \mathbf{Y}_t + \mathbf{G} \mathbf{a}_{t+1}$$

$$\mathbf{Z}_t = \mathbf{H} \mathbf{Y}_t \quad (4.2)$$

donde \mathbf{a}_t es un vector normal de las series ruido blanco con media $\mathbf{0}$ y matriz de variancia-covariancia Σ , y $\mathbf{H} = [\mathbf{I}_m, \mathbf{0}]$ donde \mathbf{I}_m , es una matriz identidad $m \times m$. Las estimaciones de las matrices \mathbf{A} , \mathbf{G} y Σ , se pueden obtener de las estimaciones del ajuste del modelo óptimo AR. Sin embargo, se pueden obtener estimaciones más naturales de la matriz de transición \mathbf{A} a partir del análisis de correlaciones canónicas. Por ejemplo sea k el número de componentes del vector de estados final \mathbf{Y}_t y sea \mathbf{A} una matriz de transición $k \times k$ (IV). 1) se conoce que $m \leq k \leq m(p+1)$. La estimación de la primer fila de \mathbf{A} se puede deducir, porque se sabe que está relacionada con la primer etapa de la secuencia del análisis correlaciones canónicas cuando $Z_{1,n+1/n}$ se adiciona al vector \mathbf{Z}_n para formar el primer subconjunto \mathbf{F}_n^1 donde se determina si $Z_{1,n+1/n}$ debería ser incluido en el vector de estados. Cuando se prueba que la correlación canónica entre \mathbf{F}_n^1 y \mathbf{D}_n no es cero, $Z_{1,n+1/n}$ se vuelve al $(m+1)$ -ésimo componente del vector de estados. Así la primer fila de \mathbf{A} tendrá 1 en la $(m+1)$ -ésima columna y 0 en las restantes. Cuando se prueba que la correlación canónica más chica es cero, una combinación lineal de \mathbf{F}_n^1 no está correlacionada con el espacio de los datos \mathbf{D}_n y $Z_{1,n+1/n}$ se esculpe del vector de estados. Como el determinante de $\Gamma(0)$ no es cero, se puede hacer que los coeficientes de $Z_{1,n+1/n}$ en esta combinación lineal sean la unidad. Así se tiene que la relación $Z_{1,n+1/n} = \alpha' \mathbf{Z}_n$, y los coeficientes del vector α son usados para estimar las primeras m colum-

nas de la matriz de transición \mathbf{A} , y las restantes $(k-m)$ columnas de la primer fila son cero. Las estimaciones de las restantes filas de \mathbf{A} se obtienen en forma similar.

Alternativamente, una vez que se identificó el modelo de espacio de los estados (IV.2), se puede usar el procedimiento de máxima verosimilitud para obtener estimadores más eficientes de \mathbf{A} , \mathbf{G} , y Σ . Para una secuencia de n observaciones dada $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \dots, \mathbf{Z}_n$, dado que

$$\mathbf{Y}_t = (\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} \mathbf{G} \mathbf{a}_t$$

se tiene

$$\mathbf{Z}_t = \mathbf{H} (\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} \mathbf{G} \mathbf{a}_t$$

y

$$\mathbf{a}_t = [\mathbf{H} (\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} \mathbf{G}]^{-1} \mathbf{Z}_t.$$

Así, la función de verosimilitud, salvo una constante aditiva, se vuelve

$$\ln L(\mathbf{A}, \mathbf{G}, \Sigma / \mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \dots, \mathbf{Z}_n) \propto (-n/2) \ln |\Sigma| - (1/2) \text{tr} \Sigma^{-1} \mathbf{S}(\mathbf{A}, \mathbf{G})$$

donde

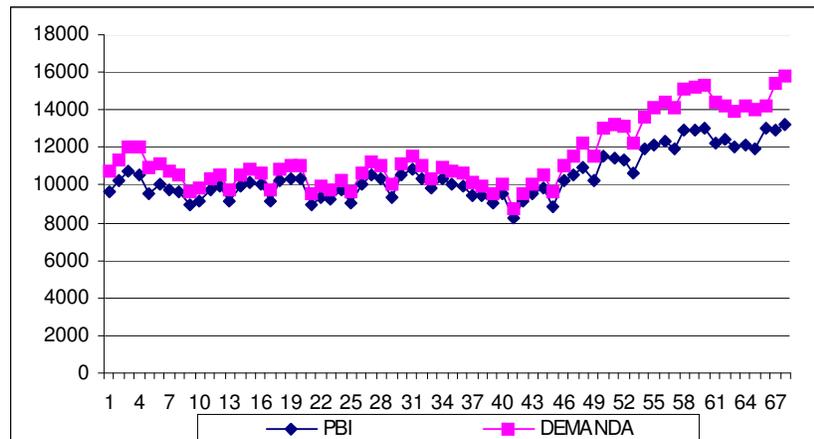
$$\mathbf{S}(\mathbf{A}, \mathbf{G}) = \sum_{t=1}^n \mathbf{a}_t \mathbf{a}_t'.$$

Se puede usar la estimación máximo verosímil estándar para modelos VARMA, pero ahora se deben estimar \mathbf{A} , \mathbf{G} , Σ . La estimación MV puede necesitar un procedimiento iterativo no lineal. Las estimaciones que se obtienen en el análisis de correlaciones canónicas pueden servir como estimaciones iniciales de este procedimiento de estimación más eficiente.

5. EJEMPLO EMPÍRICO

El siguiente ejemplo se refiere la serie bivariada $\mathbf{Z}_t = [\mathbf{Z}_{1,t}, \mathbf{Z}_{2,t}]'$ que representa las series trimestrales de Producto bruto y demanda global (suma de consumo, inversiones y exportaciones), en la República Argentina en el período 1980-1996 (Gráfico V.1).

Gráfico V. 1: PBI y Demanda Global - Argentina - Trim. 1980-1996





Para su procesamiento se usa el procedimiento STATESPACE de SAS. Como el procedimiento supone series estacionarias y las series en estudios presentan un evidente patrón estacional se le realiza la diferencia de orden cuarto.

En la Tabla V.1 se presentan las estadísticas descriptivas y los valores de AIC para modelos autorregresivos para distintos rezagos preliminares.

Tabla V.1 : Estadísticas descriptivas y autorregresivas preliminares

	Variable	Media	DS								
	PBI	155.1453	701.8124								
	DEMANDA	208.3203	964.8398								
Diferencia de orden 4.											
	Criterio de Información de los procesos Autorregresivos										
Rezago=0	Rezago=1	Rezago=2	Rezago=3	Rezago=4	Rezago=5						
1532.23834	1452.276363	1451.241179	1455.211225	1456.71077	1459.580067						
Rezago=6	Rezago=7	Rezago=8	Rezago=9	Rezago=10							
1466.150136	1463.567185	1461.173966	1468.156559	1474.82615							
Representación esquemática de las Correlaciones											
Rezago	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
PBI	++	++	++	++
DEMANDA	++	++	++	++
+ es > 2*DS, - es < -2*DS, . caso contrario											

Las series modeladas z_t por el procedimiento STATESPACE es

$$z_t = \begin{bmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-B^4)z_{1,t} - 155.1453 \\ (1-B^4)z_{2,t} - 208.3203 \end{bmatrix}$$

B: operador de rezago $B^4 z_{i,t} = z_{i,t-4}$.

Luego se presenta el Criterio de Información de Akaike (AIC), el valor más chico de AIC en este caso 1451.24 para el rezago dos, determina el número de matrices de autocovariancia analizadas en la fase de correlaciones canónicas.

Por último en la tabla se da una representación esquemática de las autocorrelaciones. Esto indica cuales elementos de las matrices de correlación son significativamente distintas de cero.

En la Tabla V.2 se presenta la representación esquemática de las matrices de autocorrelación parcial, a partir del rezago uno, prácticamente todas las autocorrelaciones parciales no son significativas de cero. No concuerda plenamente con lo encontrado por el criterio AIC, esto se puede deber a que este coeficiente es muy similar para los rezagos uno y dos.

Tabla V.2: Autocorrelaciones Parciales y Estimaciones de Yule-Walker



```

Representación esquemática de las Autocorrelaciones Parciales
Rezagó  1  2  3  4  5  6  7  8  9  10
PBI      +.  ..  ..  ..  ..  ..  -.  -+  ..  ..
DEMANDA  ..  ..  ..  ..  ..  ..  -.  -.  ..  ..

+ es > 2*DS, - es < -2*DS, . caso contrario

Estimaciones Yule-Walker para el AIC mínimo
Rezagó=1
      PBI      DEMANDA
PBI    0.54107  0.41506
DEMANDA 0.39804  0.83371

Rezagó=2
      PBI      DEMANDA
PBI    0.02256  -0.30851
DEMANDA -0.07335  -0.29626
    
```

En la misma tabla se encuentran las estimaciones de Yule-Walker del modelo autorregresivo de rezago 1 y 2. Representa las matrices de coeficientes del modelo vectorial autorregresivo para cada rezago.

Después que se selecciona el modelo de espacio de los estados, se realiza la estimación aproximadamente máximo verosímil.

Tabla V.3: Análisis de correlaciones canónicas

Vector de Estado	Correlaciones	Infor,	χ^2	G.L.
PBI (T, T), Demanda (T, T), PBI (T+1, T)	1.0 1.0 0.368	1.3102	9.02	4
PBI (T, T), Demanda (T, T), PBI (T+1, T) Demanda (T+1, T)	1.0 1.0 0.368 0.22	-2.0246	3.02	3
PBI (T, T), Demanda (T, T), PBI (T+1, T) PBI (T+2, T)	1.0 1.0 0.369 0.33	1.4286	7.25	3

La información de las correlaciones canónicas Tabla V.3 y la autorregresión preliminar se usan para las estimaciones preliminares del modelo de espacio de los estados.

En la Tabla V.4 se muestran los vectores PBI(T, T), Demanda(T, T) y PBI(T+1, T), esta notación indica que el vector de estados es

$$z_t = \begin{bmatrix} z_{1,t/t} \\ z_{2,t/t} \\ z_{1,t+1/t} \end{bmatrix}$$

donde $z_{1,t+1/t}$ es la esperanza condicional o predicción de z_{t+1} basada en la información disponible hasta el momento t, $z_{1,t/t}$ y $z_{2,t/t}$ son $z_{1,t}$ y $z_{1,t}$ respectivamente.

Luego aparecen las estimaciones de la matriz de transición **A**, de la matriz de entrada **G** y matriz de covariancia Σ .

Tabla V.4: Forma del Espacio de los estados seleccionado y Estimaciones preliminares

		Vector de Estado	
PBI (T;T)	DEMANDA (T;T)	PBI (T+1;T)	
Estimación de la Matriz de Transición			
	0	0	1
	-0.363	0.364	1.291
	0.058	-0.164	0.853
Matriz de entrada para la Innovación			
	1	0	
	0	1	
	0.541	0.415	
Matriz de Variancia para la Innovación			
	162432.939	187190.328	
	187190.328	249501.097	

La Tabla V.5 es la estimación del modelo final, es lo mismo que la Tabla V.4 pero con las estimaciones MV en lugar de las estimaciones preliminares

Tabla V.5: Forma del modelo de espacio de los estados seleccionado y modelo ajustado

		Vector de Estado	
PBI (T;T)	DEMANDA (T;T)	PBI (T+1;T)	
Estimación de la Matriz Transición			
	0	0	1
	-0.241	0.360	1.145
	0.600	-0.240	0.328
Matriz de entrada para la Innovación			
	1	0	
	0	1	
	0.687	0.358	
Matriz Variancia para la Innovación			
	153338.214	177984.399	
	177984.399	240602.53	

El modelo de espacio de los estados que presenta la Tabla IX.5 es

$$\begin{bmatrix} z_{1,t+1/t+1} \\ z_{2,t+1/t+1} \\ z_{1,t+2/t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -0.241 & 0.36 & 1.045 \\ 0.600 & -0.24 & 0.328 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t} \\ z_{1,t+1/t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0.687 & 0.358 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{t+1} \\ \eta_{t+1} \end{bmatrix}$$

$$\text{Var} \begin{bmatrix} e_{t+1} \\ \eta_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 153338 & 177984 \\ 177984 & 240602 \end{bmatrix}$$

La Tabla V.6 da las estimaciones de los parámetros de las matrices **A=F** y **G** con sus respectivos errores estándares y valor de la estadística t.

Tabla V.6: Parámetros estimados

Parametro	Estimación	DS	valor t
F (2, 1)	-0.24132	0.175176	-1.37761
F (2, 2)	0.35959	0.102455	3.509757
F (2, 3)	1.14500	0.127836	8.956839
F (3, 1)	0.60036	0.359398	1.670482
F (3, 2)	-0.24023	0.285118	-0.84256
F (3, 3)	0.32840	0.191552	1.714437
G (3, 1)	0.68669	0.326529	2.102999
G (3, 2)	0.35828	0.261382	1.370726

Los coeficientes significativos son: para estimar demanda en el momento $t+1$ dado t la demanda en el momento t y el PBI en $t+1$ dado t ; y para estimar el PBI en el momento $t+2$ dado $t+1$ el PBI en el momento t y el PBI en $t+1$ dado t (estos dos últimos al 10%).

6. CONSIDERACIONES FINALES

En esta trabajo se presentan Modelos del Espacio de los Estados para el análisis de series de tiempo multivariadas, mostrando la estrecha relación que tienen con los modelos VARMA.

Se presenta un ejemplo del área económica para clarificar los conceptos y entender mejor el funcionamiento del modelo, llegando a mostrar una relación dinámica entre ambas series, que puede ser analizada posteriormente desde un punto de vista económico.

Hasta el momento no son muchos los softwares que incluyen procedimientos para el análisis de estos modelos, por dicho motivo no han sido muy difundidos.

Cuando se tienen varias series temporales relacionadas entre ellas, si el objetivo es realizar pronósticos, se aconseja utilizar los modelos multivariados en lugar de estimar cada serie por separado, porque se obtienen previsiones más exactas.

7. BIBLIOGRAFÍA

- AKAIKE. H. (1976). "Canonical correlarions analysis of time series and the use of information criterion, in System Identification: Advances and Case Studies"(Eds. R. Mehra and D.G. Laniotis), Academic Press, New York and London.
- BARTLETT, M.S.(1941). "The statistical significance of canonical correlation", *Biometrika*, **32**, 29-38.
- (1966). "An introduction to Stochastic Processes with Reference to Methods and Application, 2end. Ed., Cambridge University Press, Cambridge.
- BOX, G.E.P. AND JENKINS, G.M.(1976). "Time Series Analysis Forecasting and Control", 2end.ed., Holden-Day, San Francisco.
- HANNAN, E.J.(1970). "Multiple Time Series", Jhon Wiley, New York.
- HARVEY, A.C.(1981). "Time Series Models", Halsted Press, New York.
- SAS/ETS USER'S(1993), Guide Version 6, Second Edition, SAS Int.Inc.
- TIAO, G.C. AND GUTMAN, I.(1980). "Modeling multiple time series with applications", *J. Amer. Statist. Assoc.* 76, 802-816.
- WEI, W.W.S.(1990). "Time Series Analysis". Addison-Wesley P.C.. New York.

