

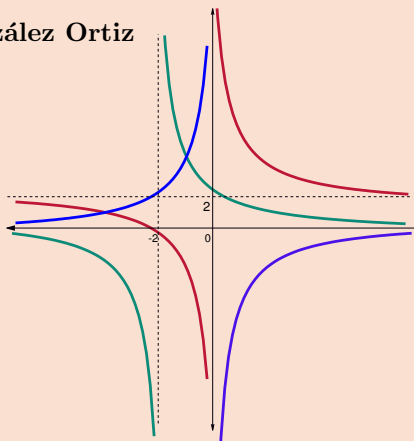
# Proyecto MaTeX

## Funciones Elementales

Fco Javier González Ortiz

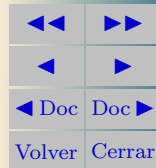
### Directorio

- [Tabla de Contenido](#)
- [Inicio Artículo](#)



MaTeX

FUNCIONES  
ELEMENTALES



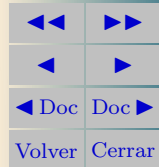
# Tabla de Contenido

1. Introducción
  2. Funciones Lineales
    - 2.1. Representación gráfica
      - La pendiente de la función lineal
    - 2.2. Funciones Lineales a trozos
  3. Funciones Cuadráticas
    - 3.1. Representación gráfica
  4. La función parte entera
  5. Valor absoluto de funciones
  6. Funciones Racionales
    - 6.1. Representación gráfica
- Soluciones a los Ejercicios
- Soluciones a los Tests



MaTEX

FUNCIÓNES  
ELEMENTALES





## 1. Introducción

En este capítulo vamos a estudiar las funciones elementales, algunas de las cuales recordaremos del curso pasado.

Las clasificamos en tres tipos:

- FUNCIONES POLINÓMICAS

a) Lineales  $y = ax + b$

b) Cuadráticas  $y = ax^2 + bx + c$

- FUNCIONES A TROZOS

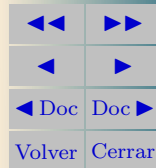
- VALOR ABSOLUTO DE FUNCIONES

- FUNCIONES RACIONALES del tipo

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

MaTeX

FUNCIONES  
ELEMENTALES



## 2. Funciones Lineales

Una función  $y = f(x)$  decimos que es lineal cuando

$$f(x) = ax + b \quad (1)$$

$f(x)$  es un polinomio de grado 1.

Ejemplos de funciones lineales son las siguientes:

$$y = x - 3 \quad y = 2x + 3 \quad y = -x + 3 \quad y = -2x + 1$$

### 2.1. Representación gráfica

- Para representar por ejemplo la función

$$y = x - 3$$

realizamos una tabla dando valores arbitrarios a  $x$ .

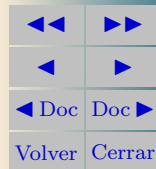
$x$	-3	-1	0	1	3
$y = x - 3$	-6	-4	-3	-2	0

Aunque teniendo en cuenta que la función es una recta y todos los puntos están alineados, con dos valores son suficientes.



MaTeX

FUNCIONES  
ELEMENTALES





**Ejemplo 2.1.** Representar las funciones

$$y = x - 3$$

$$y = 2x + 3$$

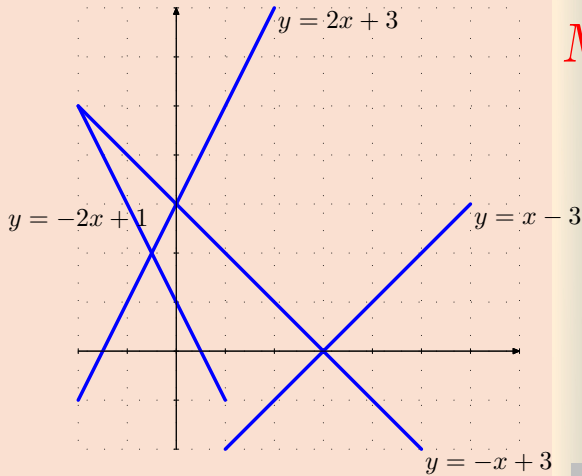
$$y = -x + 3$$

$$y = -2x + 1$$

*Solución:* Realizamos una tabla de valores para cada una de ellas

$y = x - 3$		$y = -x + 3$	
$x$	$y$	$x$	$y$
-3	-6	-3	6
-1	-4	-1	4
0	-3	0	3
1	-2	1	2
3	0	3	0

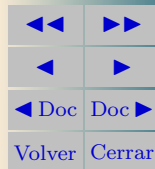
$y = 2x + 3$		$y = -2x + 1$	
$x$	$y$	$x$	$y$
-3	-3	-3	7
-1	1	-1	3
0	3	0	1
1	5	1	-1
3	9	3	-5



□

MaTeX

FUNCIONES  
ELEMENTALES



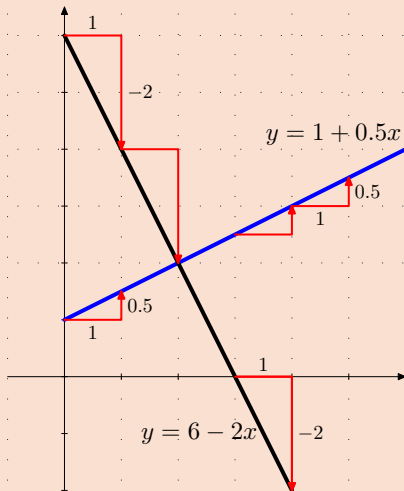


## • La pendiente de la función lineal

En el gráfico hemos representado las funciones lineales

$$y = 1 + 0,5x \quad y = 6 - 2x$$

- La **pendiente** es el valor que multiplica a  $x$  y mide la inclinación positiva o negativa de la recta. En la primera recta cada unidad que nos desplazamos en el eje  $Ox$  la recta aumenta 0,5 unidades. En la segunda la recta disminuye 2 unidades.
- La ordenada en el origen es el valor donde la recta corta al eje  $Oy$ . En la primera recta corresponde a 1, es decir corta al eje en el punto  $(0, 1)$ , y en la segunda en  $(0, 6)$ .



# MaTeX

FUNCIONES  
ELEMENTALES





## 2.2. Funciones Lineales a trozos

Una función  $y = f(x)$  puede definirse a trozos cuando cambia su expresión en su dominio. Un ejemplo de función definida a trozos es:

$$y = f(x) = \begin{cases} -x + 2 & x \leq 1 \\ x + 1 & 1 < x \end{cases}$$

Decimos que tiene que dos ramas:

- la rama  $-x + 2$  definida cuando  $x$  un valor menor o igual que 1
- y la rama  $x + 1$  definida cuando  $x$  toma un valor mayor que 1.

Para calcular valores de la función sustituiremos en la rama correspondiente al valor de  $x$ . Así por ejemplo el valor de

$$f(-3) = (-x + 2)_{-3} = -(-3) + 2 = 5$$

$$f(-1) = (-x + 2)_{-1} = -(-1) + 2 = 3$$

$$f(1) = (-x + 2)_1 = -(1) + 2 = 1$$

$$f(2) = (x + 1)_2 = (2) + 1 = 3$$

$$f(3) = (x + 1)_3 = (3) + 1 = 4$$

Para representarlas dibujaremos cada rama en su dominio correspondiente.

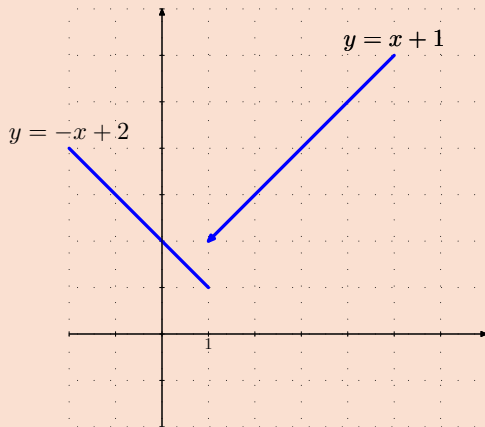
MaTEX

FUNCIÓNES  
ELEMENTALES



$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & x \leq 1 \\ x + 1 & 1 < x \end{cases}$$

$x$	$y = f(x)$
-3	5
-1	3
0	2
1	1
1	2
3	4
6	7

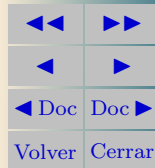


Cuando la función definida a trozos *salta* en algún punto, decimos que es **discontinua** en dicho punto. En este caso decimos que la función es discontinua en el punto  $x = 1$ . En los demás puntos la función es continua.



MaTEX

FUNCIÓNES  
ELEMENTALES





### 3. Funciones Cuadráticas

Una función  $y = f(x)$  decimos que es cuadrática cuando

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (2)$$

$f(x)$  es un polinomio de segundo grado. Ejemplos de funciones cuadráticas son las siguientes:

$$y = x^2 \quad y = -x^2 + 1 \quad y = x^2 - 6x + 8$$

■  $y = x^2$

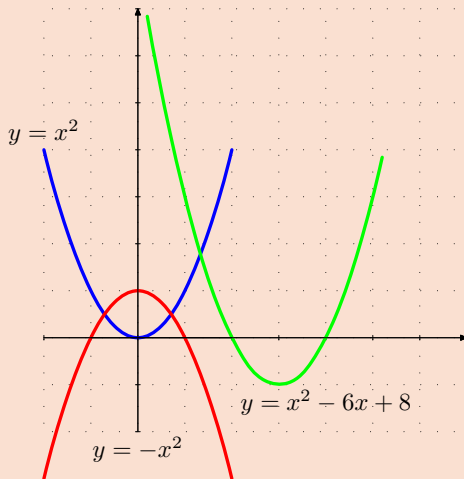
$x$	-2	-1	0	1	2
$y$	4	1	0	1	4

■  $y = -x^2 + 1$

$x$	-2	-1	0	1	2
$y$	-3	0	1	0	-3

■  $y = x^2 - 6x + 8$

$x$	0	1	2	3	4	5
$y$	8	3	0	-1	0	3



MaTeX

FUNCIONES  
ELEMENTALES





### 3.1. Representación gráfica

Para dibujar una parábola no se realiza una tabla de valores ya que conlleva muchos cálculos.

Buscamos sus puntos más importantes que son:

- **Puntos de corte** con el eje  $OX$ . Igualamos la función a cero.

$$ax^2 + bx + c = 0 \implies x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si la ecuación no tiene solución la parábola no corta al eje  $OX$ , y su gráfica está por encima o por debajo de dicho eje.

- **Cálculo del vértice**

Por simetría la abscisa del vértice está en el punto medio de los puntos de corte. Como los puntos de corte son las raíces de la ecuación  $ax^2 + bx + c = 0$ , es decir, si el vértice es  $V(u, v)$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_2 &= -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned} \right\} \implies u = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a} \quad v = f(u)$$

$$\text{Vértice } V\left(-\frac{b}{2a}, f(u)\right)$$

MaTeX

FUNCIONES

ELEMENTALES





**Ejemplo 3.1.** Estudiar y representar la función

$$y = x^2 - 2x - 3$$

*Solución:*

- Punto de corte con el eje  $OX$

hacemos  $y = 0$ ,

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \implies x = -1 \text{ o } x = 3$$

- Punto de corte con el eje  $OY$

hacemos

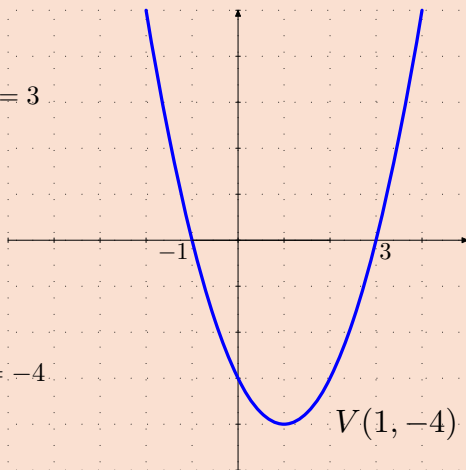
$$x = 0 \implies y = f(0) = -3$$

**Vértice**

$$u = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\implies v = f(1) = (1)^2 - 2(1) - 3 = -4$$

$$\implies V(1, -4)$$



□

**Ejercicio 1.** Estudiar y representar la función

$$y = -x^2 + 3x$$

MaTeX

FUNCIONES  
ELEMENTALES



**Ejemplo 3.2.** En un trabajo de investigación sobre el rendimiento (en una escala de 0 a 100) durante 24 horas de funcionamiento, de cierta válvula, unos ingenieros industriales han comprobado que dicho rendimiento se comporta de acuerdo con la siguiente función :

$$R(t) = \frac{(30 - t)(t + 10)}{4}$$

¿Cuánto debe de estar funcionando la válvula para conseguir su máximo rendimiento? Justificar la respuesta. Representar y comentar la función.

*Solución:* Hallamos los puntos de corte

- Punto de corte con el eje  $OX$  hacemos  $R(t) = 0$ ,

$$\frac{(30 - t)(t + 10)}{4} = 0 \implies t = -10 \text{ o } t = 30$$

- Punto de corte con el eje  $OY$  hacemos

$$t = 0 \implies R(0) = 75$$

Si operamos queda

$$R(t) = -\frac{1}{4}t^2 + 5t + 75$$

Como el signo de  $t^2$  es negativo nos indica que la parábola tiene su máximo rendimiento en su vértice.

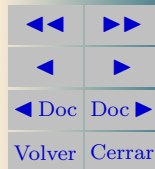
**Vértice**

$$u = -\frac{b}{2a} = \frac{-5}{-1/2} = 10 \implies v = R(10) = 100 \implies V(10, 100)$$

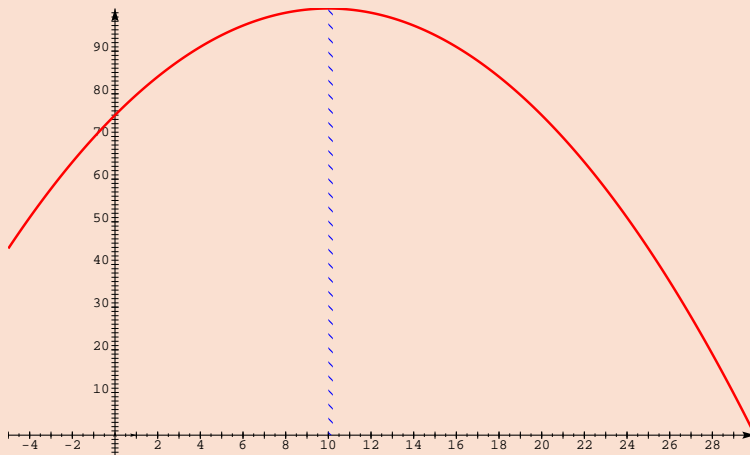


MaTeX

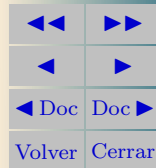
FUNCIONES  
ELEMENTALES



El máximo rendimiento se presenta a las 10 horas, siendo este de 100. Hemos representado el rendimiento con  $t$  desde -4 a 30, pero según el enunciado la función sólo está definida cuando  $t$  varía entre las 0 y las 24 horas.



□

*MaTeX***FUNCIONES  
ELEMENTALES**

**Ejemplo 3.3.** Un fondo de inversión genera una rentabilidad que depende de la cantidad de dinero invertida según la fórmula:

$$R(x) = 0,8x - 0,002x^2 - 5$$

donde  $R(x)$  representa la rentabilidad generada cuando se invierte la cantidad  $x$  (en miles de pesetas).

Determinar justificando las respuestas :

- ¿Cuánto dinero (en pesetas) debemos invertir para obtener la máxima rentabilidad posible?
- ¿Cuál será el valor de dicha rentabilidad máxima?

*Solución:*

La función es una parábola luego estudiamos los puntos de corte y su vértice.

- Punto de corte con el eje  $OX$  hacemos  $R(x) = 0$ ,

$$0,8x - 0,002x^2 - 5 = 0 \implies x = 6,35 \text{ o } x = 393,65$$

- Punto de corte con el eje  $OY$  hacemos

$$x = 0 \implies R(0) = -5$$

Como el signo de  $x^2$  es negativo nos indica que la parábola tiene su máxima rentabilidad en su vértice.

**Vértice**

$$u = -\frac{b}{2a} = \frac{-0,8}{-0,004} = 200 \implies v = R(200) = 75 \implies V(200, 75)$$



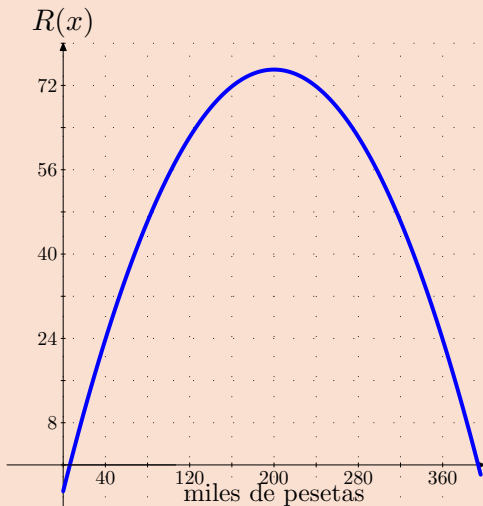
MaTeX

FUNCIONES  
ELEMENTALES



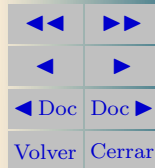
La máxima rentabilidad se presenta con  $x = 200$  miles de pesetas, siendo ésta de 75.

A partir de los puntos de corte y el vértice dibujamos la gráfica donde se aprecian las respuestas de las preguntas del ejercicio y el comportamiento de la rentabilidad  $R(x)$  en función del dinero  $x$  invertido en miles de pesetas.



MaTEX

FUNCIONES  
ELEMENTALES



□



## 4. La función parte entera

**Ejemplo 4.1.** Estudiar y representar la función

$$y = E[x]$$

donde  $E[x]$  se lee como la parte entera de un número y se refiere al mayor entero menor o igual que  $x$ .

*Solución:* Damos algunos valores a  $x$

$$E[3,99] = 3$$

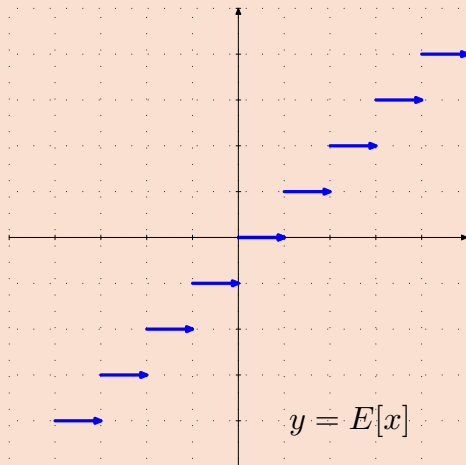
$$E[2,51] = 2$$

$$E[1,99] = 1$$

$$E[0,01] = 0$$

$$E[-0,33] = -1$$

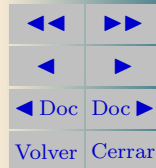
$$E[-1,08] = -2$$



□

# MaT<sub>E</sub>X

FUNCIÓNES  
ELEMENTALES







## 5. Valor absoluto de funciones

Recordamos que el valor absoluto de un número es el mismo si es positivo y cambia de signo si es negativo. Es decir

$$|3| = 3 \quad |8,4| = 8,5 \quad |-5| = 5 \quad |-8,3| = 8,3$$

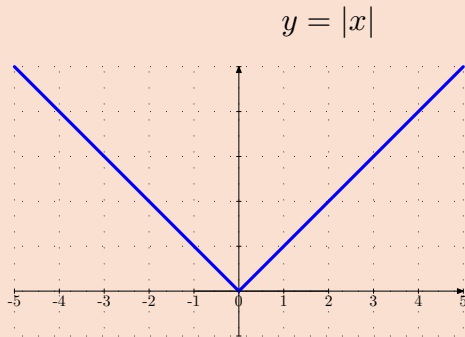
**Ejemplo 5.1.** Estudiar y representar la función

$$y = |x|$$

*Solución:*

De forma general con el valor absoluto las funciones quedan definidas a trozos

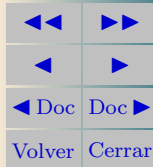
$$y = |x| = \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ x & 0 \leq x \end{cases}$$



□

# MaTeX

FUNCIONES  
ELEMENTALES





**Ejemplo 5.2.** Estudiar y representar la función

$$y = |x - 2|$$

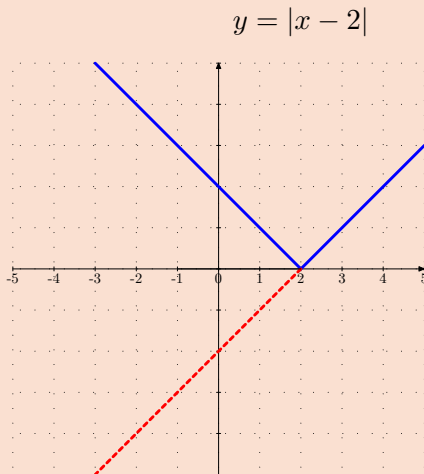
*Solución:*

El signo de  $x - 2$  cambia en  $x = 2$ , luego

$$y = |x-2| = \begin{cases} -x + 2 & x \leq 2 \\ x - 2 & 2 \leq x \end{cases}$$

Se representan ambas ramas de la función.

Cuando se tiene el valor absoluto de una función se puede representar la función y a continuación se refleja en el eje  $Ox$  la parte negativa, como muestra el gráfico



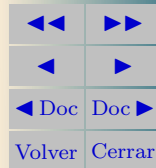
□

**Ejercicio 2.** Estudiar y representar la función

$$y = |x| - 2$$

MaTEX

FUNCIÓNES  
ELEMENTALES





**Ejemplo 5.3.** Estudiar y representar la función

$$y = | -x^2 + 3x |$$

*Solución:* Como el valor absoluto es de toda la función, representamos ésta y después reflejamos la parte negativa

• Punto de corte con el eje  $OX$   
hacemos  $y = 0$ ,

$$-x^2 + 3x = 0 \implies x = 0 \text{ o } x = 3$$

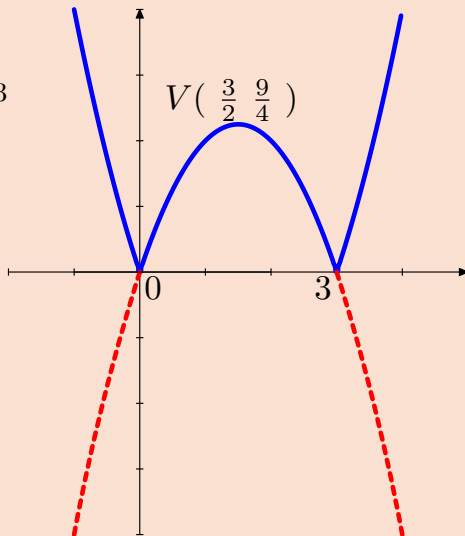
• Punto de corte con el eje  $OY$   
hacemos

$$x = 0 \implies y = f(0) = 0$$

**Vértice**

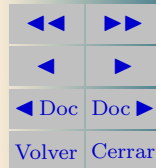
$$u = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2}$$

$$\implies v = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} \implies V\left(\frac{3}{2}; \frac{9}{4}\right)$$



MaTeX

FUNCIONES  
ELEMENTALES



□



## 6. Funciones Racionales

Una función  $y = f(x)$  decimos que es racional cuando

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

es un un cociente de polinomios  $P(x)$  y  $Q(x)$ . Al ser un cociente su **dominio** son todos los números reales menos los números que anulan el denominador

$$Dom = R - \{ \text{raíces del denominador} \}$$

Ejemplos de funciones racionales y sus dominios son las siguientes:

- $y = \frac{1}{x}$        $Dom = R - \{0\}$
- $y = \frac{2}{x-1}$        $Dom = R - \{1\}$
- $y = \frac{x+1}{x-2}$        $Dom = R - \{2\}$
- $y = \frac{2}{x^2-1}$        $Dom = R - \{\pm 1\}$
- $y = \frac{2}{x^2+1}$        $Dom = R$

# MaTEX

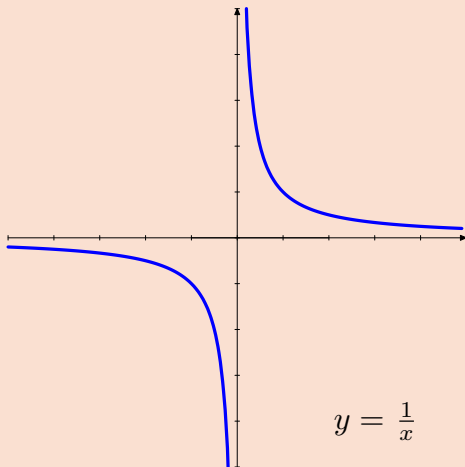
**F**UNCIONES  
**E**LEMENTALES



Representamos la función racional más sencilla  $y = \frac{1}{x}$  realizando unas tablas de valores. Observar que para valores cercanos a  $0$  la función toma valores muy grandes:

$x$	$y = 1/x$
-10	-0.1
-5	-0.2
-1	-1.0
-0,1	-10.0
-,01	-100.0
$-10^{-5}$	$-1.10^5$

$x$	$y = 1/x$
10	0.1
5	0.2
1	1.0
0,1	10.0
0,01	100.0
$10^{-5}$	$1.10^5$



$$y = \frac{1}{x}$$

Se aprecia como la función se aproxima al eje  $Oy$  que es una asíntota vertical y se aproxima al eje  $Ox$  que es una asíntota horizontal.



MaTeX

FUNCIONES  
ELEMENTALES



## 6.1. Representación gráfica

Para dibujar una función racional buscamos sus puntos de corte con los ejes y las **ramas del infinito** o **asíntotas**:

- **Asíntota vertical**, cuando en un punto la función tiende a infinito

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

- **Asíntota horizontal**, cuando  $x \rightarrow \infty$  la función tiende a un valor finito

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$$

Los límites que usaremos aquí serán muy sencillos y el alumno los aprendió en cursos anteriores.

En algunos casos puede haber asíntota oblicua pero ésta la estudiaremos más adelante en el capítulo dedicado a la representación de funciones.

Las funciones racionales que el alumno trabajará en este nivel son todas de la forma

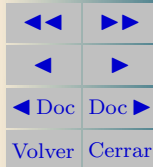
$$y = f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$



MaTEX

FUNCIÓNES

ELEMENTALES





**Ejemplo 6.1.** Estudiar y representar la función  $y = \frac{x-1}{x}$

*Solución:*

- El dominio es  $\mathcal{D} = \mathcal{R} - \{0\}$
- Punto de corte con el eje  $OX$

hacemos  $y = 0$ ,

$$\frac{x-1}{x} = 0 \implies x = 1$$

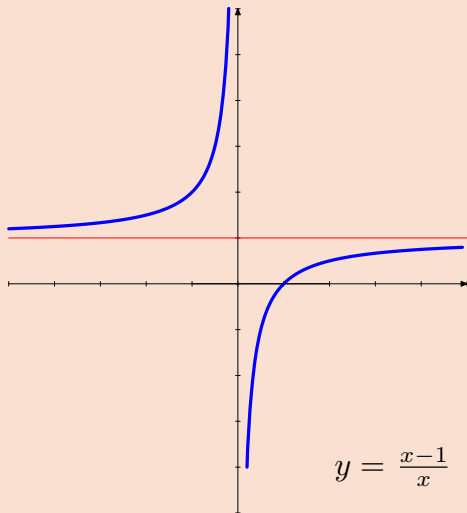
Punto de corte con el eje  $OY$

$$x = 0 \implies y = f(0) = \nexists$$

- **Asíntota vertical**  $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x} = +\infty$$



- **Asíntota horizontal**, cuando  $x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x} = 1$$

□

MaTEX

FUNCIÓNES  
ELEMENTALES





**Ejemplo 6.2.** Estudiar y representar la función  $y = \frac{x-1}{x-2}$

*Solución:*

- El dominio es  $\mathcal{D} = \mathcal{R} - 2$
- Punto de corte con el eje  $OX$

hacemos  $y = 0$ ,

$$\frac{x-1}{x-2} = 0 \implies x = 1$$

Punto de corte con el eje  $OY$

$$x = 0 \implies y = f(0) = 1/2$$

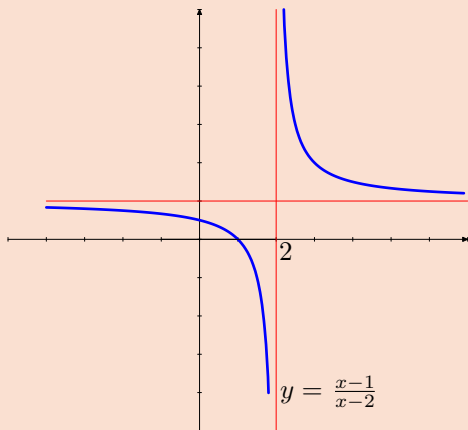
- **Asíntota vertical**  $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-1}{x-2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-1}{x-2} = -\infty$$

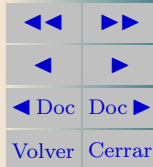
- **Asíntota horizontal**, cuando  $x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x-2} = 1$$



MaTEX

FUNCIÓNES  
ELEMENTALES



□





**Test.** Considera el siguiente gráfico y responde:

1. La función  $y = \frac{1}{x} + 2$  es la

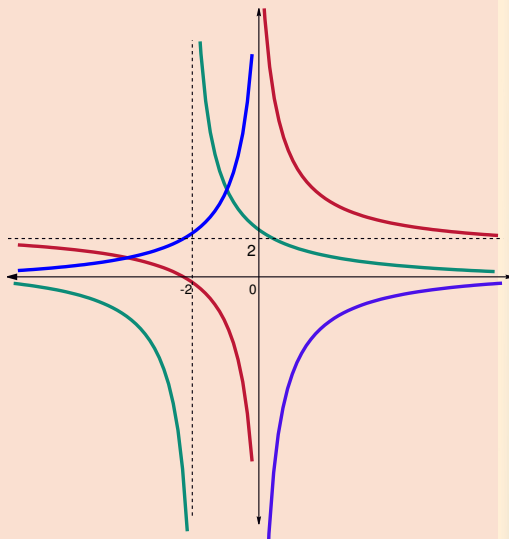
- (a) azul      (b) granate  
(c) verde

2. La función  $y = \frac{1}{x+2}$  es la

- (a) azul  
(b) granate  
(c) verde

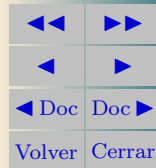
3. La función  $y = -\frac{1}{x}$  es la

- (a) azul  
(b) granate  
(c) verde



MaTEX

FUNCIONES  
ELEMENTALES



**Ejemplo 6.3.** Para fabricar una pared 2 albañiles emplean 50 horas.

- a) ¿Cuántas horas emplearán 6 albañiles?  
 b) Haz una tabla y una gráfica de la función que relaciona dichas variables

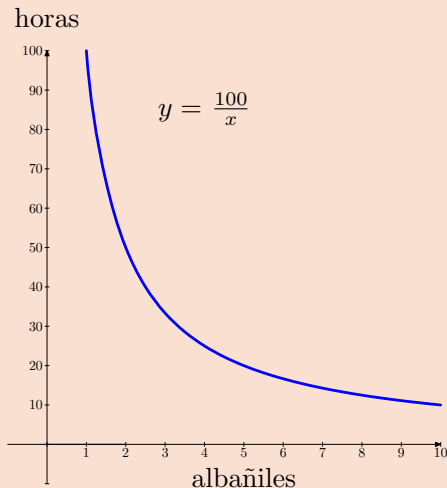
*Solución:* Un albañil en proporción inversa emplea 100 horas. El número de horas en función del número de albañiles es la función

$$y = \frac{100}{x}$$

- Para  $x = 6$  albañiles se tiene

$$y(6) = \frac{100}{6} \text{ horas}$$

Dando valores a  $x$  se puede trazar el gráfico de la función.

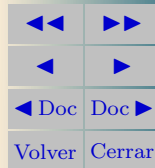


□



MaTeX

FUNCIONES  
ELEMENTALES





**Ejercicio 3.** Estudiar y representar la función

$$y = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ \frac{2x-1}{3} & 1 < x \end{cases}$$

**Ejercicio 4.** Estudiar y representar la función

$$y = \begin{cases} -x-1 & x \leq -1 \\ 2x^2-2 & -1 < x < 1 \\ x-1 & 1 \leq x \end{cases}$$

**Ejercicio 5.** Un almacenista de frutas ha estimado que el beneficio que le produce cada kilogramo de fresas depende del precio de venta de acuerdo con la siguiente función :

$$B(x) = 2x - x^2 - 0,84$$

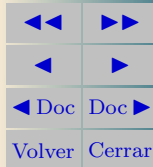
siendo  $B(x)$  el beneficio por kilogramo, expresado en euros, cuando  $x$  es el precio de cada kilogramo también en euros.

- ¿Entre qué precios por kilogramo se producen beneficios para el almacenista?
- ¿Qué precio por kilogramo maximiza los beneficios para éste?
- Si tiene en el almacén 10000 kilogramos de fresas ¿cuál será el beneficio total máximo que podría obtener?

MaTEX

FUNCIÓNES

ELEMENTALES



**Ejercicio 6.** Una tienda de productos de belleza ha comprobado que el número de unidades de un determinado perfume vendidas cada mes depende del precio de venta de acuerdo con la expresión siguiente:

$$N(x) = 270 - 0,03x$$

Donde  $N(x)$  es el número de unidades vendidas al mes cuando el precio de cada unidad es de  $x$  pesetas.

Determinar justificando las respuestas:

- La expresión que representa los ingresos producidos cada mes por dicho producto en función del precio de cada unidad.
- ¿Cuál será el precio (en pesetas) de cada unidad que hace máximos estos ingresos?
- ¿Qué valor tendrán estos ingresos máximos?
- ¿Cuántas unidades se venderán con este precio?

**Ejercicio 7.** Sea  $x$ , en euros, el precio de venta del litro de aceite de oliva virgen extra, y sea :

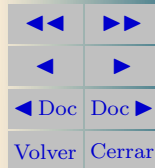
$$f(x) = 2 - \frac{4}{x+1} \quad x \geq 0$$

la función que representa el beneficio económico quincenal, en miles de euros, de una empresa agrícola.



MaTEX

FUNCIÓNES  
ELEMENTALES



- a) ¿A partir de qué precio de venta del litro de aceite empieza esta empresa a tener beneficios?
- b) ¿Están limitadas las ganancias quincenales de esta empresa?. ¿Y las pérdidas?.

**Ejercicio 8.** Las ganancias de una empresa, en millones de pesetas, se ajustan a la función:

$$f(x) = \frac{50x - 100}{2x + 5} \quad x \geq 0$$

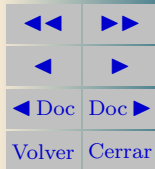
Donde  $x$  representa los años de vida de la empresa, cuando  $x > 0$

1. Represente gráficamente la función  $y = f(x)$  para  $x \in (-\infty, \infty)$ .
2. ¿A partir de qué año la empresa deja de tener pérdidas?
3. A medida que transcurre el tiempo, ¿están limitados sus beneficios?. En caso afirmativo, ¿cuál es su límite?.



MaTEX

FUNCIONES  
ELEMENTALES





**Test.** Responde a las preguntas:

1. El vértice de la parábola  $y = x^2 - 6x + 8$  es:  
 (a) (3, 0)                      (b) (3, -1)                      (c) (3, 1)

2. Las asíntotas de la función  $y = \frac{x}{x-3}$  son:  
 (a) ninguna                      (b) 1                      (c) 2

3. La función  $y = |x| + 1$  en  $x = -1$  vale:  
 (a) 0                      (b) 1                      (c) 2
- Sea la función

$$y = f(x) = \begin{cases} -x + 2 & x \leq 1 \\ x + 1 & 1 < x < 2 \\ 1 - x^2 & 2 \leq x \end{cases}$$

4. El valor de  $f(0)$  es:  
 (a) 1                      (b) 2                      (c) -1
5. El valor de  $f(2)$  es:  
 (a) -3                      (b) 3                      (c) 1
6. La función  $f(x)$  es continua en  $x = 1$ :  
 (a) verdadero                      (b) falso

MaTEX

FUNCIÓNES  
ELEMENTALES





## Soluciones a los Ejercicios

### Ejercicio 1.

- Punto de corte con el eje  $OX$

hacemos  $y = 0$ ,

$$-x^2 + 3x = 0 \implies x = 0 \text{ o } x = 3$$

- Punto de corte con el eje  $OY$

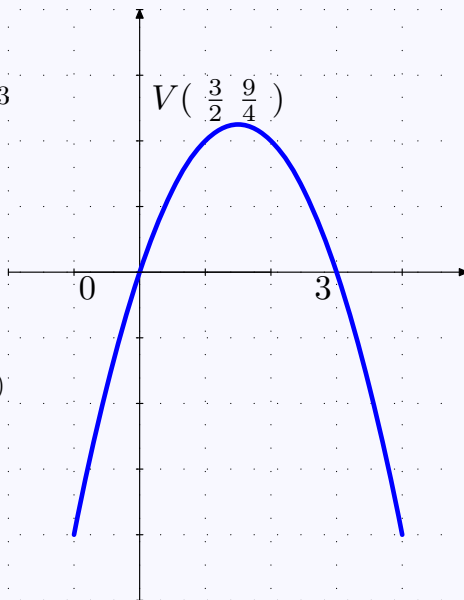
hacemos

$$x = 0 \implies y = f(0) = 0$$

**Vértice**

$$u = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2}$$

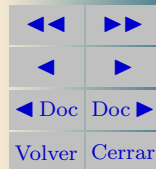
$$\implies v = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} \implies V\left(\frac{3}{2}; \frac{9}{4}\right)$$



Ejercicio 1

MaTEX

FUNCIÓNES  
ELEMENTALES

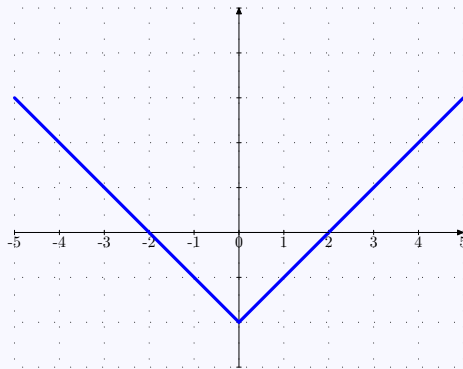


**Ejercicio 2.** Quitamos el valor absoluto en  $y = |x| - 2$

El signo de  $x$  cambia en  $x = 0$ ,  
luego

$$y = |x| - 2 = \begin{cases} -x - 2 & x \leq 0 \\ x - 2 & 0 \leq x \end{cases}$$

Cada rama es una función lineal o recta. Basta representar cada una de ellas en su dominio respectivo.

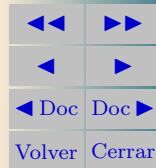


Ejercicio 2



MaTEX

FUNCIÓNES  
ELEMENTALES







## Ejercicio 3.

$$y = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ \frac{2x-1}{3} & 1 < x \end{cases}$$

- La rama

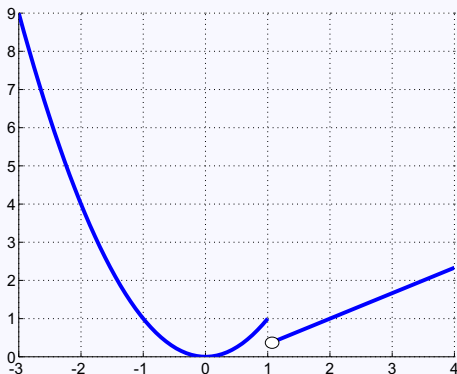
$$y = \frac{2x-1}{3}$$

pasa por los puntos  $A(1, \frac{1}{3})$  y  $B(2, 1)$

- La rama

$$y = x^2$$

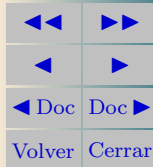
es la parábola de vértice  $V(0, 0)$



Ejercicio 3

MaTeX

FUNCIONES  
ELEMENTALES





## Ejercicio 4.

$$y = \begin{cases} -x - 1 & x \leq -1 \\ 2x^2 - 2 & -1 < x < 1 \\ x - 1 & 1 \leq x \end{cases}$$

- La rama

$$y = -x - 1$$

pasa por los puntos  $A(-2, 1)$  y  $B(-1, 0)$

- La rama

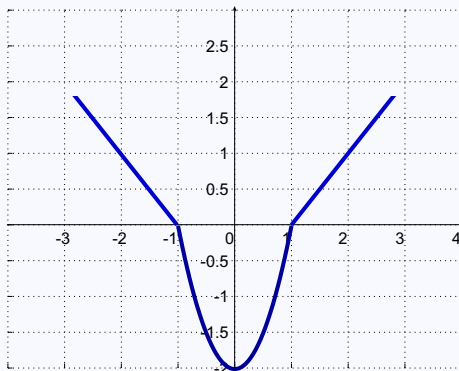
$$y = 2x^2 - 2$$

es la parábola de vértice  $V(0, -2)$

- La rama

$$y = x - 1$$

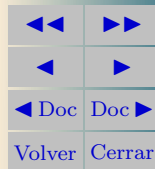
es la recta que pasa por los puntos  $C(1, 0)$  y  $B(2, 1)$



MaTeX

FUNCIONES  
ELEMENTALES

Ejercicio 4



**Ejercicio 5.** El beneficio que le produce cada kilogramo de fresas depende del precio de venta de acuerdo con la siguiente función :

$$B(x) = 2x - x^2 - 0,84$$

Siendo  $B(x)$  una parábola, con los puntos de corte y el vértice se responde a las preguntas.

- Punto de corte con el eje  $OX$  hacemos  $B(x) = 0$ ,

$$2x - x^2 - 0,84 = 0 \implies x = 0,6 \text{ o } x = 1,4$$

Como el signo de  $x^2$  es negativo nos indica que la parábola tiene su máximo beneficio en su vértice.

- Vértice

$$u = -\frac{b}{2a} = \frac{-2}{-2} = 1 \implies v = B(1) = 0,16 \implies V(1; 0,16)$$

- a) ¿Entre qué precios por kilogramo se producen beneficios para el almacenista?

Entre los puntos de corte, la función beneficio es positiva, luego entre los valores de  $x$ ,  $x = 0,6$  y  $x = 1,4$

- b) ¿Qué precio por kilogramo maximiza los beneficios para éste?

Cómo el máximo está en  $x = 1$ . El máximo beneficio se produce para un precio de 1 euro por kilo que le reporta un beneficio de 0,16 euros.



MaTeX

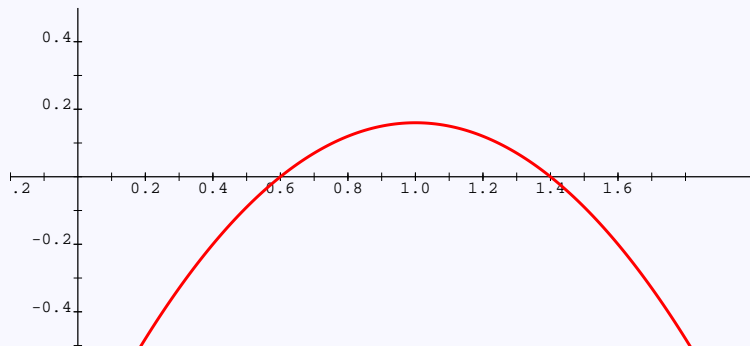
FUNCIONES  
ELEMENTALES



c) Si tiene en el almacén 10000 kilogramos de fresas ¿cuál será el beneficio total máximo que podría obtener?

Para el acaso de 10000 kilos vendidos se producirá un beneficio de

$$10000 \cdot 0,16 = 1600 \text{ euros}$$



Ejercicio 5



MaTEX

FUNCIÓNES  
ELEMENTALES



**Ejercicio 6.** Siendo

$$N(x) = 270 - 0,03x$$

el número de unidades vendidas al mes cuando el precio de cada unidad es de  $x$  pesetas.

- a) Los ingresos producidos cada mes por dicho producto en función del precio de cada unidad es

$$I(x) = (270 - 0,03x) \cdot x$$

- b) El máximo de estos ingresos, como la función es una parábola se alcanza en el vértice

- Vértice

$$u = -\frac{b}{2a} = \frac{-270}{-0,06} = 4500 \text{ pts}$$

- c) El valor de estos ingresos máximos es

$$I(4500) = 607500 \text{ pts}$$

- d) Las unidades que se venderán con ese precio es

$$N(4,500) = 135 \text{ unidades}$$

En la página siguiente se muestra la gráfica de la función de los ingresos en función del precio de cada unidad  $x$  en pesetas



# MaTEX

**FUNCIONES  
ELEMENTALES**

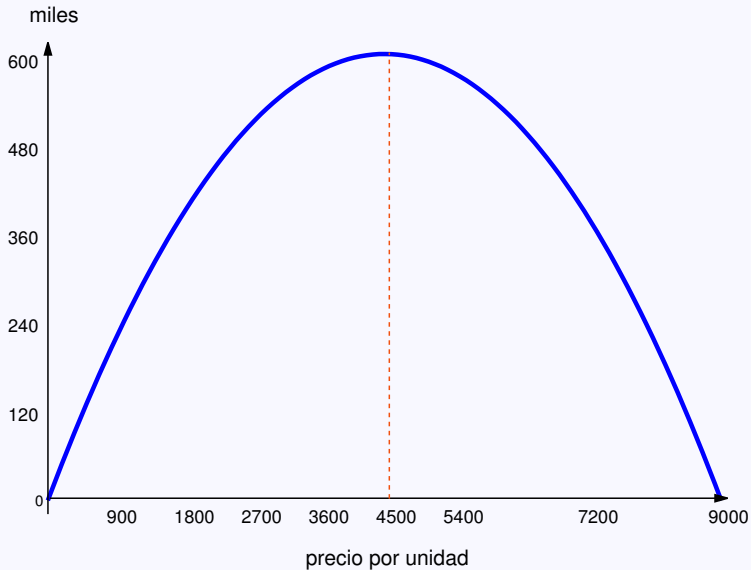




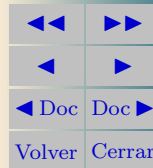
MaTeX

FUNCIONES

ELEMENTALES



Ejercicio 6



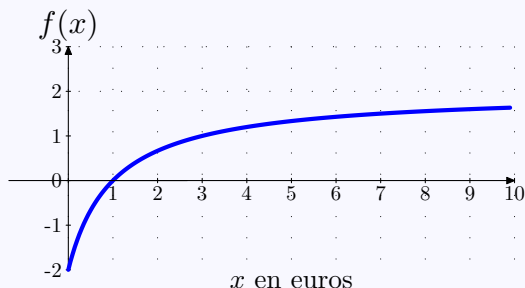
**Ejercicio 7.** Para  $x = 0$  se tiene  $f(0) = 2 - \frac{4}{0+1} = -2$ . El punto de corte con el eje  $Ox$

$$2 - \frac{4}{x+1} = 0 \implies x = 1$$

luego empieza a tener beneficios a partir de  $x = 1$  euro. Tiene una asíntota horizontal pues

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 2 - \frac{4}{x+1} \right) = 2$$

luego como  $B(x) < 2$  las ganancias están limitadas y como el valor mínimo lo alcanza en  $x = 0$  las pérdidas lo están por 2 euros.



MaTeX

FUNCIONES  
ELEMENTALES

Ejercicio 7





**Ejercicio 8.** Para  $x = 0$  se tiene  $f(0) = \frac{50(0) - 100}{2(0) + 5} = -20$ .

El punto de corte con el eje  $Ox$   $\frac{50x - 100}{2x + 5} = 0 \implies x = 2$  años

Asíntotas horizontal y vertical

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{50x - 100}{2x + 5} = 25 \quad \lim_{x \rightarrow -2,5^+} \frac{50x - 100}{2x + 5} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -2,5^-} \frac{50x - 100}{2x + 5} = +\infty$$

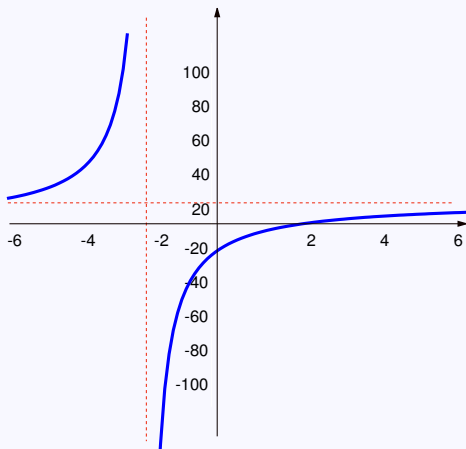
La función tiene sentido a partir de  $x > 0$ .

Desde 0 a 2 como  $f(x) < 0$  la empresa tiene pérdidas y empieza a tener beneficios a partir del  $x = 2$  años.

Sus beneficios están limitados por la asíntota horizontal

$$y = 25$$

luego los beneficios  $y$  nunca alcanzarán dicha cantidad.



MaTeX

FUNCIONES  
ELEMENTALES



Ejercicio 8



## Soluciones a los Tests

**Solución al Test:** En efecto

- **Asíntota vertical**  $x = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x}{x-3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{x-3} = -\infty$$

- **Asíntota horizontal**,  $y = 1$ , pues cuando  $x \rightarrow \infty$

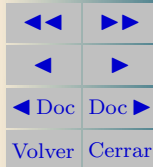
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-3} = 1$$

Final del Test



MaTEX

FUNCIÓNES  
ELEMENTALES



## Índice alfabético

función cuadrática, 9  
representación, 10

función lineal, 4  
a trozos, 7  
representación, 4, 5

función parte entera, 16

función racional, 20  
asíntotas, 22  
representación, 22

valor absoluto, 17–19



# MaTeX

FUNCIONES  
ELEMENTALES

