Provincia de Buenos Aires
Dirección General de Cultura y Educación
Subsecretaría de Educación
Dirección Provincial de Educación de Gestión Estatal
Dirección de Educación General Básica
Gabinete Pedagógico Curricular - Matemática

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS PARA

LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EN EGB

Documento Nº 3 - Año 2001

Introducción

Durante los últimos cuatro años se han desarrollado numerosos encuentros organizados por esta dirección con maestros, profesores, directores e inspectores de diferentes escuelas, distritos y regiones.

La finalidad de los mismos fue ofrecer espacios de reflexión conjunta sobre la enseñanza de diversos contenidos del área de matemática.

En el marco de estas experiencias, se han elaborado ya los documentos 1/99 y Orientaciones sobre la Enseñanza de la División (1/01) en los que se recuperan experiencias de maestros y directores con el objetivo de difundirlas.

En estos años, muchos de los docentes participantes, han realizado acciones de difusión en sus escuelas o distritos, convocando a colegas a compartir sus experiencias.

Este documento apunta en esa misma dirección: acercar al resto de los docentes el trabajo realizado por los participantes de los encuentros. En este caso particular, sobre la enseñanza de la geometría.

Queremos agradecer la colaboración y el apoyo brindado por: Jefes de Inspectores, inspectores, directores, profesores y maestros, maestros recuperadores, orientadores educacionales y a los directores de las escuelas sedes de los encuentros. Todos ellos han participado de modos diversos para su realización.

También, y muy especialmente, agradecemos a los docentes que han difundido sus experiencias organizando encuentros, a los maestros que han abierto las puertas de sus aulas para compartir clases, y a todos aquellos que nos hicieron llegar informes del trabajo en las aulas y producciones de sus alumnos con la finalidad de difundir y compartir experiencias didácticas. (No podemos mencionarlos a todos aquí por ser muchos docentes)

Asimismo aclaramos que hemos tenido que seleccionar producciones para elaborar este documento, y en dichos casos sí mencionaremos escuelas y docentes. Sepan disculparnos - el resto de docentes y alumnos – por no poder volcar aquí la enorme cantidad de producciones recibidas, que, serán muy útiles para continuar con los trabajos de difusión en otros encuentros.

La Enseñanza de la Geometría en los tres ciclos de la EGB

¿Por qué la enseñanza de la geometría? Muchos docentes solicitaron trabajar en torno a este contenido dada la gran cantidad de interrogantes que se presentan en su enseñanza y que hacen que, muchas veces, esté casi ausente en el trabajo en las aulas. A partir de estas dificultades propusimos revisar su enseñanza.

Intentaremos en este documento desarrollar algunas ideas y propuestas didácticas producto del trabajo realizado[1].

El marco teórico desde el cual trabajamos es la Didáctica de la Matemática francesa. Consideramos en especial los aportes de Brousseau (1986); los estudios de Berteloth y Salin (1994), Laborde (1990,1991); Balacheff (1987), las investigaciones de Fregona (1995) y el trabajo de Gálvez (1994). Nos apoyamos también en trabajos de difusión de propuestas didácticas (Saiz, 1995) , y principalmente en un trabajo de desarrollo curricular de la Ciudad de Buenos Aires (Sadovsky, Parra, Itzcovich y Broitman, 1998).

¿Cuál es el objetivo de la enseñanza de la geometría desde esta perspectiva en la EGB?

En líneas generales, la enseñanza de la geometría en la EGB apunta a dos grandes objetivos. Por una parte, el estudio de las propiedades de las figuras y de los cuerpos geométricos; y por la otra, al inicio en un modo de pensar propio del saber geométrico [2]. Ampliaremos estas dos ideas a lo largo de este documento.

El estudio de las propiedades de las figuras y los cuerpos implica mucho más que reconocerlas perceptivamente y saber sus nombres. Implica conocer, cada vez con mayor profundidad, sus propiedades y poder tenerlas disponibles para resolver diversos tipos de problemas geométricos. Este aspecto es posible de ser abordado desde el primer ciclo.

El "modo de pensar geométrico" supone poder apoyarse en propiedades estudiadas de las figuras y de los cuerpos para poder anticipar relaciones no conocidas. Se trata de poder obtener un resultado – en principio desconocido- a partir de relaciones ya conocidas. Esta es la anticipación. Por otra parte poder saber que dicho resultado es el correcto porque las propiedades puestas en juego lo garantizan. En geometría el modo de demostrar la validez de una afirmación no es empírico (por ejemplo midiendo o dibujando) , sino racional (a través de argumentos). Estos aspectos del estudio de la geometría se inician en los primeros años, pero son más propios del segundo y tercer ciclo[3].

---

[1] Recordamos a los lectores que hay en circulación un Documento sobre la enseñanza de la Geometría elaborado por el equipo de la Dirección de Currículum de la Ciudad de Buenos Aires. Dicho material ha sido puesto en circulación a partir de los encuentros con inspectores, una gran cantidad de directores y maestros.

[2] Ver Documento 5 GCBA, 1998.

[3] Ver Marco General Pre Diseño Curricular GCBA, 1999.

Estas ideas fueron trabajadas en los encuentros con los docentes a partir de ciertos problemas planteados. Por ejemplo:

"Analizar para los datos que se dan a continuación si todos los triángulos pueden ser construidos. En caso negativo analizar por qué no lo son y en caso positivo determinar la cantidad de soluciones posibles [4]*.*

- *un triángulo equilátero cuyos ángulos sean de 60º, 70º y 50º"*
- *un triángulo cuyos ángulos sean 100º,30º y 50º*
- *un triángulo cuyos lados midan 3cm. , 4 cm y 5 cm respectivamente.*

Luego de que los docentes, en pequeños grupos resolvieron estos problemas, iniciamos la comparación de respuestas y soluciones. A partir del análisis colectivo se elaboraron algunas primeras conclusiones didácticas:

- Algunos problemas geométricos no tienen solución, como el primero. Surgió el debate acerca de cuál sería la intencionalidad de plantear a los alumnos problemas sin solución. Su interés radica en que este tipo de problemas provoca la necesidad de justificar la imposibilidad de la construcción. Se intenta que los alumnos puedan avanzar del "no me sale el triángulo" al "no se puede hacer esa construcción". Este salto involucra pensar – en el problema del ejemplo- en las propiedades del triángulo equilátero para finalmente, sin necesidad de hacer el dibujo, concluir que *"Los triángulos equiláteros tienen sus lados iguales, por lo tanto tienen sus ángulos iguales. Como la suma de los ángulos interiores de un triángulo mide 180º, entonces sus ángulos miden todos 60º".*
  Retomamos aquí la idea antes planteada de que en geometría se acepta la validez de una afirmación por la argumentación y no por el dibujo o la medición.

- Algunos problemas geométricos tienen infinitas soluciones, como por ejemplo, el segundo de los triángulos. Aquí también se espera que los alumnos puedan pasar de su inicial construcción, a considerar que existen otras, las de sus compañeros; y luego, apoyándose en ciertas relaciones, empezar a concebir que hay infinitas. Se espera que puedan argumentar que *"los lados pueden agrandarse o achicarse - mientras los lados de todos los otros sean paralelos a los lados del construido - y no se modifican las medidas de los ángulos".*
  Hemos planteado que en geometría no se demuestra dibujando. Sin embargo, aclaramos , que tal vez, dicha argumentación, se pueda apoyar en un dibujo, aunque este no sea preciso. No es el dibujo el que permite demostrar que hay infinitos triángulos que cumplen con dichas condiciones, pero éste puede ser un punto de apoyo para explicar ciertos razonamientos.

- Otros problemas geométricos tienen una única solución. Tal es el caso de la construcción del triángulo para el que se dan las medidas de los tres lados. Poder pasar de "a mí me salió éste" a "éste es el único posible" es parte de

[4] Un problema similar puede ser planteado a los alumnos de quinto o sexto año de la EGB cuando están estudiando los triángulos. Sin embargo será necesario modificar su redacción.

aquello que definimos como “modo de pensar geométrico”. Aquí se trata de que los alumnos lleguen a la conclusión de que *“dadas las medidas de los tres lados, las medidas de los ángulos son siempre las mismas” y “aunque cambia la posición, se trata del mismo triángulo”* (o triángulos congruentes)

Y ya a un nivel más general, se pudo discutir en los encuentros a partir de la resolución y el análisis de estas construcciones, cuáles son las características que tiene que tener una situación para ser considerada un problema geométrico.

Como sucede también en el terreno aritmético, para que una situación sea un problema para los alumnos es necesario que:

- implique un cierto nivel de dificultad, presente un desafío, tenga algo de “novedad” para los alumnos,
- exija usar los conocimientos previos, pero que éstos no sean totalmente suficientes,
- se realice un análisis de los mismos y se tomen decisiones.

Reproducimos a continuación las características específicas que Sessa (1998) señala que debe tener un problema geométrico:

- *Para resolverlo se deben poner en juego las propiedades de los objetos geométricos.*
- *El problema pone en interacción al alumno con objetos que ya no pertenecen al espacio físico, sino a un espacio conceptualizado representado por las figuras – dibujos.*
- *En la resolución del problema, los dibujos no permiten arribar a la respuesta por simple constatación sensorial.*
- *La validación de la respuesta dada al problema – es decir la decisión autónoma del alumno acerca de la verdad o falsedad de la respuesta- no se establece empíricamente, sino que se apoya en las propiedades de los objetos geométricos. Las argumentaciones a partir de las propiedades conocidas de los cuerpos y figuras, producen nuevo conocimiento acerca de los mismos.*

Al igual que ha sido planteado para la enseñanza de los conocimientos aritméticos en los Documentos 1/97, 1/99, 1/01 los problemas pueden ser el punto de partida para aprender algo nuevo. También en geometría adoptamos la concepción de los problemas como motor de avance de la producción del conocimiento matemático [5].

Citamos a continuación un párrafo del Pre Diseño Curricular del GCBA Matemática 2do ciclo (1999):

“...Para que los alumnos puedan profundizar sus conocimientos geométricos, es decir para que puedan avanzar en el análisis de las

[5] Ver también Charnay (1994)

propiedades de las figuras será necesario – como ocurre en otros ámbitos de la actividad matemática- que el conocimiento geométrico se elabore a partir de la resolución de los problemas que los niños enfrenten".

En los encuentros, estos primeros problemas permitieron abordar otro tipo de conclusiones acerca del trabajo en geometría. Algunas de las mismas fueron las siguientes:

- Trabajar en geometría con problemas también implica aceptar y prever que aparecerán procedimientos diversos de resolución.

- Será necesario generar un clima de trabajo que favorezca inicialmente la autonomía y libertad para resolverlos, y luego una instancia de comparación y discusión acerca de los diferentes recursos utilizados por los alumnos [6].

- Es esperable que aparezcan entre las soluciones encontradas, varias respuestas erróneas. Las mismas merecen ser objeto de análisis para toda la clase. Es a través de la discusión y argumentación sobre los errores que se podrán elaborar conclusiones más próximas al saber que se intenta enseñar.

- Luego de la discusión y el trabajo colectivo sobre los problemas será necesario destacar aquello nuevo que ha sido producido. Las conclusiones pueden ser muy diversas según los problemas y el objetivo de la clase. A veces son propiedades o relaciones nuevas, en ocasiones se trata de nuevo vocabulario específico, de otras formas de representación, etc. (Por ejemplo: *"no hay triángulos equiláteros obtusángulos porque...." ; "hay infinitos triángulos con estos ángulos"; "se llaman triángulos congruentes a aquellos que...." ; "no es suficiente hacer un dibujo para saber que ese triángulo existe"*, etc.)

- Es importante registrar en las carpetas o cuadernos, y/ o en carteles en el aula, algunas de las conclusiones pues las mismas se constituyen en "nuevos conocimientos" que precisarán ser consultados durante un tiempo para resolver otros problemas o para empezar a recordarlos.

- El conocimiento a enseñar, (en lugar de ser "presentado" inicialmente y luego "utilizado" en problemas) se instala en la clase y reconoce como tal a partir del trabajo que se organiza luego de que los alumnos resuelven los problemas. Por ello hablamos de los problemas como punto de partida para aprender los nuevos conocimientos.

Veamos cómo estas ideas pueden ponerse en juego en las aulas.

[6] En el Documento 1/01 sobre la Enseñanza de la División ha sido desarrollado el análisis de los diversos procedimientos y errores esperables cuando se plantean problemas "nuevos" a los niños. Se retoma el enfoque desarrollado allí para este otro contenido,

Diversos tipos de problemas geométricos

Presentamos a continuación una variedad de actividades analizadas con los docentes y realizadas en las aulas que intentan dar cuenta de la posibilidad de enfrentar a los alumnos desde los primeros años de la escolaridad a “verdaderos” desafíos.

Estas actividades – bajo ciertas condiciones didácticas- responden a las características que adquiere un problema geométrico detalladas anteriormente.

Dos aclaraciones resultan necesarias:

- estos tipos de actividades no son el objeto de enseñanza. Es posible utilizar algunas de las mismas para abordar los diversos contenidos. (Por ejemplo si el objeto matemático a enseñar son los ángulos, será posible seleccionar actividades diversas que pongan en juego conocimientos específicos de dicho contenidos. Lo mismo para clasificación de figuras geométricas, triángulos, cuadriláteros, etc.)

- estas actividades, si bien pueden resultar “atractivas” no pretender ser juegos o actividades para ser presentadas en forma aislada. Son ejemplos de tipos de problemas geométricos posibles de ser incluidos en el marco de un proyecto de enseñanza junto a otros problemas. Será necesario seleccionarlas teniendo en cuenta su fertilidad para aportar nuevos aspectos del conocimiento que se intenta enseñar.

A. Juegos de adivinación[7]

En este tipo de problemas, se les presenta a los alumnos una colección de figuras geométricas o de cuerpos. Una persona (docente o alumno) elige uno, no dice cuál eligió y el resto de la clase tiene que preguntar para adivinar cuál es.

Desde la perspectiva de los alumnos, la finalidad del juego es adivinar cuál es la figura o cuerpo seleccionado por el docente o por un alumno. La restricción es que las preguntas sólo pueden ser contestadas por “Sí” o por “No”.

También puede plantearse en pequeños grupos, cada grupo con su colección de figuras o cuerpos en los que el rol de elegir es rotativo.

Ahora bien, adivinar cuál es la figura o cuerpo es la finalidad para los alumnos. ¿Cuáles son en cambio las intenciones didácticas? Desde el punto de

[7] Este tipo de actividades fueron tomadas del Documento Nº 5 GCBA (1998) Y Pre Diseño Curricular GCBA, 1999.

vista del docente hay varios objetivos: el principal es que los alumnos pongan en juego un análisis y explicitación de las propiedades que van descubriendo. Para formular las preguntas es preciso seleccionar características comunes o diferentes de los elementos de la colección presentada.

También es una actividad que permite la incorporación de nuevo vocabulario.

Otro objetivo, aunque no desde los aprendizajes geométricos, es que los alumnos se enfrenten a un problema en el que tienen que tener en cuenta una gama variada de información, tener en cuenta las preguntas realizadas, analizar la pertinencia de sus preguntas, analizar la conveniencia de realizar una u otra, etc.

Aclaramos que la selección de las figuras o de los cuerpos debe responder a los objetivos del trabajo. Según cuáles sean las propiedades que el docente intenta poner en juego en esas clases, será la selección de los elementos (podrían ser figuras todas diferentes, o bien todos triángulos, todos cuadriláteros, figuras cóncavas y convexas, etc.)

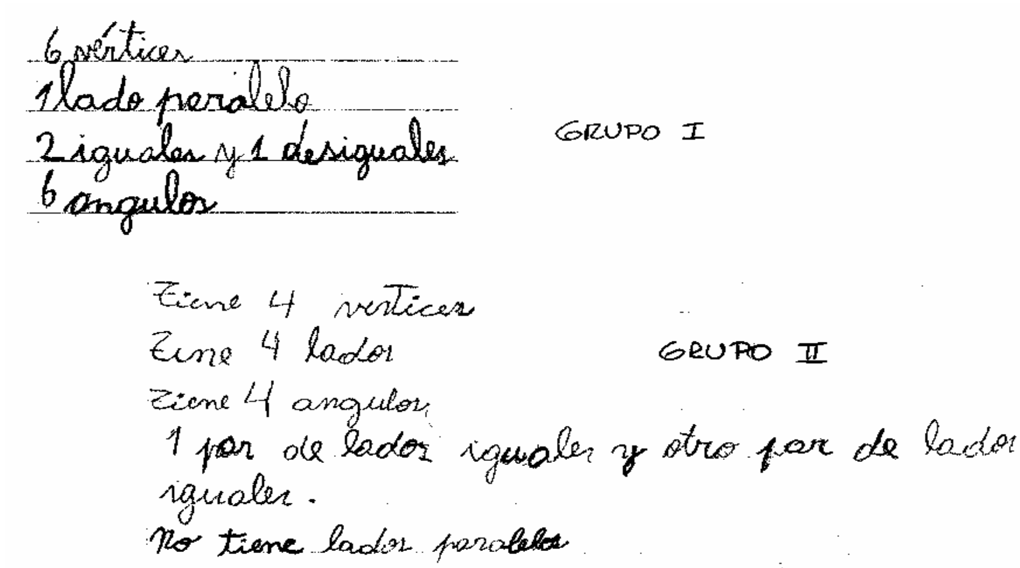
Es preciso realizar esta actividad durante varias clases en una secuencia de trabajo. Luego de “jugar”, se propone analizar las preguntas realizadas por los alumnos, discutir sobre la conveniencia de unas u otras, instalar nuevo vocabulario, explicitar relaciones, etc.

Seguramente no todos los niños desplegarán las mismas propiedades al formular sus preguntas y habrá alumnos que elaboren estrategias para ganar más rápido al considerar mejor las diferentes características de la colección presentada. La puesta en común, luego del juego, es entonces la instancia en la que se difunden dichos descubrimientos. Se trata de hacer circular para todos, lo que tal vez produjeron algunos. Es interesante registrar las conclusiones, las “buenas” preguntas, los “consejos para jugar mejor”, el nuevo vocabulario, etc. El trabajo colectivo sobre el juego es una oportunidad para que todos aprendan y rescatar aquello que debe ser retenido (por ejemplo *“hoy vimos que una pregunta muy importante era si las figuras tenían 4 lados, vamos a llamar a las figuras de cuatro lados cuadriláteros, así la próxima vez todos nos entendemos*”, o bien *“como eran todos triángulos tenemos que preguntar por sus lados y por sus ángulos para saber cuál es el elegido”*, etc.)

Presentamos a continuación una de las actividades que Verónica Wagner, maestra de 3º año de la Escuela 46 de Lobería, propuso a sus alumnos, con el objetivo de establecer relaciones que permitan encontrar algunas características de ciertas figuras planas:

Cada grupo de niños recibe una fotocopia con varias figuras (cuadrados, rectángulos, rombos, triángulos, paralelogramos, etc.) La maestra elige una de las figuras y los alumnos tienen que hacer preguntas que serán contestadas únicamente por sí o no. Mediante dichas preguntas, deben trata de adivinar de qué figura se traa. (Las preguntas podrán ser planteadas oralmente o por escrito).

El grupo 1 y el grupo 2 escriben las siguientes preguntas:


6 vértices
1 lado paralelo
2 iguales y 1 desiguales
6 angulos

GRUPO I

Tiene 4 vertices
Tine 4 lados
Tiene 4 angulos
1 par de lados iguales y otro par de lados iguales.
No tiene lados paralelos

GRUPO II

Evidentemente, los alumnos de estos grupos ya disponían de un cierto vocabulario y el conocimiento de varias relaciones que forman parte de las características de algunas figuras. A pesar de ello, la idea de paralelismo entre lados es una cuestión a seguir trabajando (como se evidencia en la producción del grupo 1). Esta actividad puede permitir al docente recuperar este concepto y someterlo a discusión con toda la clase - luego de que los alumnos resuelven la situación- mediante la presentación de nuevos desafíos, la introducción de cierto vocabulario, la explicitación de algunas propiedades que pusieron en juego los chicos, etc.

Al presentar a los alumnos problemas de esta naturaleza, se debe tener muy presente, - como ha sido mencionado anteriormente - cuál es el objetivo a alcanzar y cuál es el conocimiento que se pretende que los alumnos aprendan (Por ejemplo: caracterizar una colección de figuras; incorporar un vocabulario; identificar similitudes y diferencias entre figuras; abordar la idea de paralelismo etc.) Dicho conocimiento es el que condiciona la selección de la colección de figuras sobre la que se va a trabajar.

Esta última consideración es la que también tienen presentes en la Escuela 39 de Morón cuando les proponen el mismo tipo de actividad a los alumnos de sexto año. En este caso, el contenido es la clasificación de triángulos. En consecuencia, la fotocopia con figuras que la maestra y la maestra recuperadora entregan a los alumnos está conformada por una amplia variedad de triángulos (equiláteros, escalenos e isósceles; acutángulos, rectángulos y obtusángulos).

La maestra elige una de esas figuras y los alumnos deben anotar preguntas intentando, mediante las misma, obtener información para averiguar de qué figura se trata.

Transcribimos a continuación una parte del registro de la clase confeccionado por docentes de esa escuela:

Los alumnos tienen dificultades en un principio, para diferenciar las características. Surgen preguntas como: ¿Tiene las partes iguales?; ¿Es alto?; ¿Es ancho?

Se van haciendo intervenciones (docentes) *solicitando mayor precisión.* (La intervención docente en este caso permite a los alumnos reconocer que el ancho o el alto no da "pistas" sobre una figura).

Comienzan a surgir preguntas en función de los lados, y, en un grupo, en función de los ángulos.

Concluido el tiempo previsto por el docente, se anotan en el pizarrón las preguntas formuladas para ser analizadas por toda la clase:

¿Tiene todos los lados iguales?
¿Tiene lados chicos?
¿Es ancho?
¿Es parecido a una escuadra?
¿Tiene un ángulo recto?
¿Tiene sus tres lados desiguales?

Estas preguntas y las respuestas que da la docente durante el transcurso del juego , le permiten a los alumnos avanzar en la determinación de qué triángulo se trata.

Luego, el mismo conjunto de preguntas se "transforman" en un objeto de análisis en sí mismo. Las docentes invitan a sus alumnos a discutir cuáles preguntas eran mejores y cuáles no aportaban demasiado. Entre otras cosas, llegan a concluir que preguntar por el ancho, o si los lados son chicos no son preguntas válidas.

Las docentes proponen luego una segunda vuelta del juego. Volvemos a transcribir parte del registro:

El juego se realizará sin escribir las preguntas. Se formularán seis preguntas…..

….Es notable como los chicos van "afinando" las preguntas, buscando definir las relaciones de manera más efectiva….

….En una tercera vuelta del juego, serán solo cuatro las preguntas que podrán hacer….

….Se aprecia que hay dos grupos que participan velozmente…. Otros necesitan más tiempo y muchas veces son sobrepasados por los anteriores….

Es muy interesante resaltar dos cuestiones, a partir del registro de la clase, que permiten reflexionar sobre las decisiones didácticas. La primera tiene que ver con disminuir la cantidad de preguntas que se autoriza hacer a los alumnos. Esta restricción, tal como señala el registro, exige a los alumnos precisar las relaciones, detectando aquellas características que permitan "englobar" o "descartar" a una buena parte de la colección de figuras. Por ejemplo la pregunta *"¿tiene un ángulo agudo?"* seguramente da cuenta de una característica que identifique a cierta cantidad de triángulos y deje afuera a otra. Es decir que, esta restricción es intencional, permite provocar avances en el análisis de propiedades de las figuras.

La segunda cuestión tiene que ver con los tiempos que demanda la resolución de cada situación a los alumnos, problema que aparece enunciado en el registro y en muchos relatos de los docentes. Al igual que sucede en cualquier clase de matemática, hay heterogeneidad de ritmos de trabajo en los alumnos, heterogeneidad de conocimientos e incluso de niveles de participación.

¿Qué se propone desde este enfoque didáctico en relación con esta diversidad esperable? Se trata de poder generar en el aula condiciones que promuevan la circulación de los "descubrimientos" y reflexiones que hacen los alumnos. Forma parte del trabajo sobre un problema "dar la palabra" a los alumnos para que expliciten resultados y estrategias, generar la circulación y difusión a toda la clase de aquello que han producido algunos, promover el análisis colectivo de los errores y de los aciertos, resaltar al finalizar la clase qué es lo importante que los alumnos deberán retener y que ha sido producido por todos.

Contemplamos que el trabajo en el aula con la diversidad de alumnos exige entonces al docente una diversidad de estrategias para lograr, a lo largo de un conjunto de problemas, que sea posible "hacer de todos" el conocimiento que ha circulado, para hacer "público" y colectivo lo que en otra fase del trabajo ha sido "privado", individual. Aquí también hay una intencionalidad didáctica a destacar: intervenir de maneras diversas, para favorecer dicha circulación del conocimiento.

Resaltamos también la importancia del trabajo continuado a lo largo de varias clases y nuevos problemas, considerando que la "enseñanza" no se agotó en un primer juego, aunque algunos alumnos hayan aprendido muy rápidamente. Seguramente será necesario retomar en las clases siguientes lo elaborado por todos, volver a resaltarlo, promover el registro escrito de las conclusiones, de tal manera que aquellos alumnos que menos han avanzado "mientras jugaban" tengan luego varias oportunidades de aprender.

Posiblemente algunos alumnos precisarán incluso alguna actividad individual para volver a mediar con dicho problema y el conocimiento en cuestión. Se puede presentar a los niños que lo precisen, actividades escritas individuales que simulen una parte del juego. Por ejemplo: *"Un nene tenía estas figuras y no sabía cuál habían elegido. ¿Qué preguntas le conviene hacer?* O *"el mismo nene hizo estas preguntas ¿te parece que todas eran necesarias? ¿por qué?"*. También es interesante presentar las figuras y dos o tres preguntas contestadas y que el alumno señale las figuras que pueden ser y elabore una nueva pregunta para continuar.

En otras situaciones, es posible que el docente “juegue” exclusivamente con el grupo de niños que más precisa avanzar en sus conocimientos y estrategias “practicando” el juego mientras el resto de la clase realiza alguna actividad que no precise de tanta intervención del maestro. Se les explica a estos niños que van a “practicar para jugar mejor la próxima vez”. Algunos docentes incluso preguntan a los alumnos *¿“quiénes creen que tienen que practicar un poco porque se perdían mientras jugaban los otros”?.* Es interesante resaltar cómo, en el grupo pequeño, en el que no están presentes los niños “más rápidos” para resolver el problema, muchos niños ocupan roles mas comprometidos y activos con la tarea a realizar. Por eso se sugiere que estos pequeños grupos de trabajo y apoyo, no tengan más de seis o siete niños.

Patricia, maestra de 1º año de la Escuela 11 de Claromecó, también propuso a sus alumnos un juego de adivinar figuras. En este caso, se utilizó un pizarrón magnético y distintas figuras geométricas.

La docente elige una de las figuras y los alumnos, por turno, deberán hacer preguntas por escrito, que solo puedan responderse por sí o por no.

Reproducimos aquí algunas de las preguntas elaboradas por los chicos:

4 LADOS Y 4 PUNTAS.Y TIENE
TODOS LOS LADOS YGUALES.

TIENE 4 PUNTAS Y CUATRO LADOS
TIENE 2 LADOS INCLINADOS

Nos parece muy importante destacar en este caso que los alumnos se enfrentaban por primera vez a tantas figuras “todas juntas”. La maestra nos comenta en su registro: *me llamó la atención que todos los niños de primer año usen* –tan tempranamente- *la palabra “lado”, cosa que no ocurrió con los de segundo año. Estos últimos, también se enfrentaban por primera vez a este tipo de actividad, pero ya “conocían” algunas palabras desde primer año, pero no las usaban en las preguntas que hacían* [8].

[8] Recordemos que también en el Diseño Currícula de Nivel Inicial de Prov. de Bs.As. se plantea como expectativas de logro: *“Identificación y caracterización de formas en cuerpos y figuras..”*

B. Copiado de figuras.[9]

El copiado de figuras es también un tipo de actividad que permite enfrentar a los niños al análisis de las propiedades de las figuras. Tener que reproducirla exige tomar en cuenta sus elementos, las medidas, conservar ciertas propiedades, seleccionar los instrumentos más convenientes a utilizar, etc.

A diferencia de los juegos de adivinación, en estos problemas, no es necesario explicitar las propiedades mientras se realiza la actividad.

Para lograr dicha explicitación de propiedades será imprescindible generar luego un trabajo colectivo de comunicación de procedimientos de copiado. Los alumnos podrán compartir con sus compañeros sus producciones, compararlas. El docente puede seleccionar dos o tres alumnos que deberán relatar lo realizado, o bien reproducirlo en el pizarrón. El docente puede guiar la comparación de recursos utilizados por medio de preguntas al resto de los alumnos: (*¿Por dónde empezaron? ¿Alguien empezó el copiado por otro lado? ¿Todos usaron compás? ¿Alguien usó la escuadra? ¿Cómo hacían para saber que esos dos lados eran iguales?, etc.)*

Este tipo de problemas exige tomar algunas decisiones didácticas:

- La clase de figuras a copiar dependerá del contenido que se esté abordando en la clase.

- El tipo de hoja presentada y a utilizar por el alumno (por ejemplo, en un copiado de un rectángulo, si la hoja es cuadriculada, no será necesario enfrentarse al uso de la escuadra para hacer ángulos rectos o para comparar longitudes; en cambio el mismo copiado en hoja lisa sí lo exigirá).

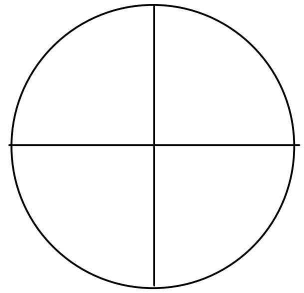
- Los materiales que pueden usar los alumnos (por ejemplo, se puede poner como condición no usar escuadra para que los alumnos tengan que hacer de otros modos el ángulo recto, o no permitir el uso de regla graduada para que tengan que transportar la medida con el compás, etc.).

Una ventaja de este tipo de problemas es que los alumnos pueden validar por sus propios medios su producción. Será por medio de la superposición a trasluz que podrán darse cuenta de si han logrado o no reproducir la figura presentada. Y si no lo han logrado, podrán realizar ajustes o volver a empezar.

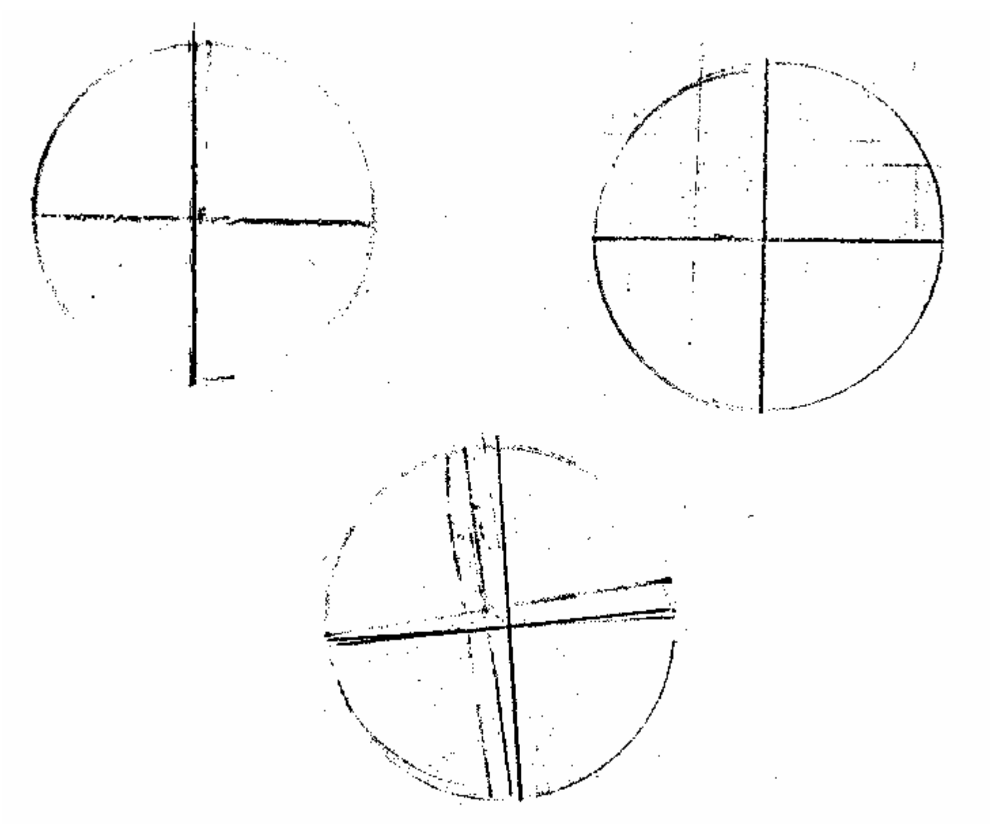
En la Escuela 151 de La Matanza, la maestra de 3º año, Marcela Vila y la maestra recuperadora, Silvina Abramoff, proponen a sus alumnos una actividad de copiado de figuras. Nos aclaran que sus alumnos, en una clase anterior, habían realizado varios dibujos con compás, sin ningún tipo de restricciones con la intención de que aprendan a utilizarlo.

[9] Extraído del Documento 5 GCBA (1998)

El primer problema consistía en copiar un dibujo que los docentes entregaron a cada alumno. El dibujo era el siguiente:



Reproducimos a continuación algunas de las copias del dibujo que se realizaron en el aula:



La mayoría de los alumnos no tuvo inconvenientes en copiar el dibujo. Hubo diversas estrategias que usaron para lograrlo, algunas acertadas y otras con ciertos errores. Ambos tipos de producciones fueron objeto de discusión en la clase, cuestión intencionalmente promovida por las docentes.

Algunos niños pinchaban el compás en el centro (aunque no lo llamaban así) y abrían el compás hasta la circunferencia. Con esta medida, pinchaban en la hoja en blanco y obtenían una “copia fiel” de la circunferencia. En donde se produjeron errores fue en el trazado de los diámetros. (Como se puede notar en los dibujos de los niños, Rubén copia uno de los diámetros “a ojo” y no le resulta un obstáculo, en cambio Lucas intenta “ajustar” uno de los diámetros para que se vea en la misma posición que en el original).

El modo en que las docentes propusieron a sus alumnos controlar si la copia era igual al original fue por intermedio de la superposición (a trasluz), evidenciando las diferencias entre uno y otro dibujo. Los alumnos intentan corregir, pero al no disponer de una escuadra que permita el trazado de perpendiculares, el dibujo se acepta con una aproximación “a ojo”.

Al finalizar la tarea, las docentes promueven una reflexión en torno al copiado, generándose el siguiente diálogo, extraído del registro de la clase de la Inspectora Eleonora García:

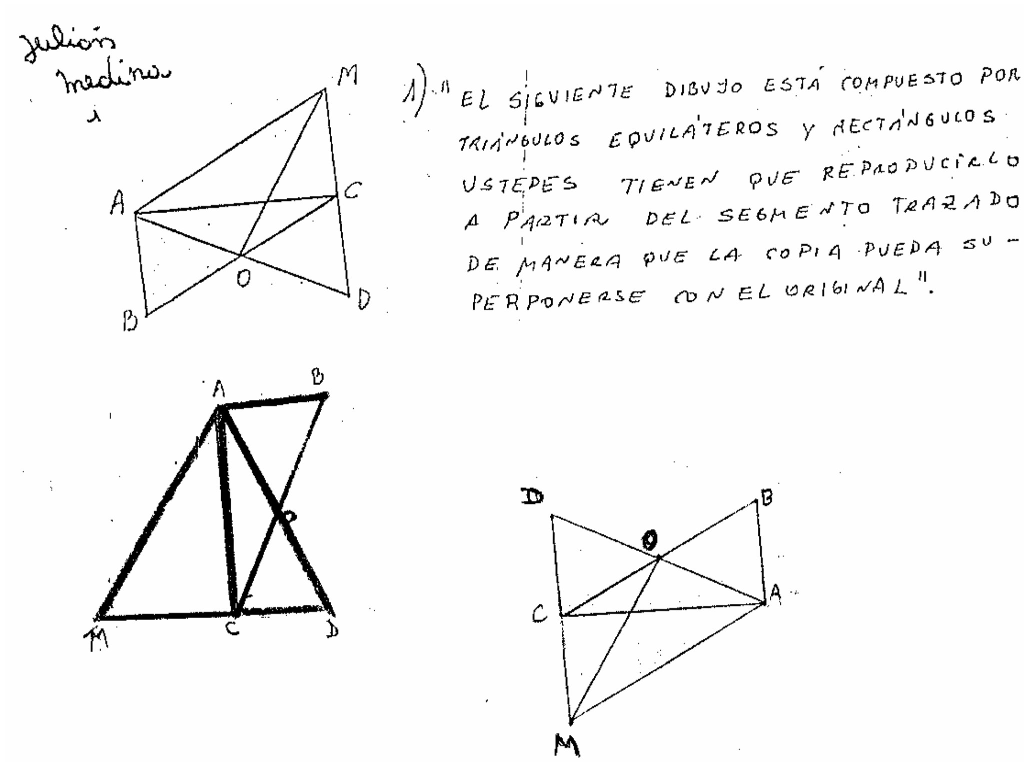
> *Alumno: Si le hacés así* (maniobra con el compás) *le sacás la forma. El redondo con el compás y las rayas con el lápiz*
> *Maestra: ¿Cómo se que haciendo así los dos redondos son iguales?*
> *A: Pinchás en el medio, justito ahí en el centro….*
> *M: ¿Y cómo se que los dos van a ser iguales?*
> *A: Porque se mide justo en el medio y el otro sale igual. No se pasa porque llega hasta acá* (señalando la abertura del compás)*……*
> *M: ¿Y como sigue?*
> *A: Medís esa rayita y la hacés en el otro círculo…*
> *A: Hacés la raya así* (horizontal) *que pase por el puntito* (que dejó marcado el compás)
> *M: ¿Y cómo sé que esta raya* (diámetro horizontal del original) *y esta raya* (diámetro horizontal de la copia) *son iguales?.*
> *A: (interrumpiendo) Porque los dos son el mismo círculo!!!!*

En esta actividad, hay dos decisiones que toman las docentes que merecen ser destacadas:

La primera de ellas es que los alumnos pueden empezar a resolver la situación, con aciertos y errores, apelando a diferentes estrategias. Y es a partir de estas resoluciones que se busca intencionalmente que los alumnos se encaminen en discusiones colectivas en las cuales, comienzan a utilizar algunas palabras (redondo, círculo, puntito del medio, la rayita etc.). Destacamos que las docentes, a partir de dichas expresiones, deciden instalar en la clase los nombres socialmente reconocidos. Este vocabulario aparece en el marco de la comunicación de las estrategias empleadas, en consecuencia, se transforma en un recurso útil y necesario para poder entender de qué se está hablando.

La segunda decisión está relacionada con favorecer la entrada en la racionalidad geométrica, fundamentalmente cuando la docente pregunta *¿Y cómo se que estas rayas son iguales?* Esta intervención provoca en los alumnos avances en los análisis: *“las dos rayitas son iguales porque los círculos son iguales”* (hablando del diámetro horizontal). Esta afirmación no se apoya en la medida, no se basa en la superposición de las figuras. Se infiere a partir de comenzar a establecer cierto tipo de relaciones, incluso a partir de propiedades que aún no han sido explicitadas.

La maestra Bibiana Morel, de 6º año de la Escuela Normal Superior Nº 46 de Lobería, propone a sus alumnos una actividad de copiado de figuras, pero bajo otro tipo de condiciones:



En el primer caso, la maestra, junto al dibujo original les presenta el segmento CB. En el segundo caso, junto al original les presenta el segmento CA.

Lo interesante de este tipo de actividad es que exige a los alumnos una análisis bastante riguroso de las características y relaciones que presenta el dibujo. Es claro que en el primer dibujo los alumnos no consideraron - como parte de las relaciones que presenta la figura- que los segmentos AM y CB son paralelos. Este “error”, esperable, puede ser puesto en evidencia al solicitar a los alumnos que superpongan el original y la copia. Esta corroboración permitirá “afinar la puntería” en el análisis de la figura.

A su vez, esta actividad exige un juego de anticipación: si no se determinan de “antemano” ciertas relaciones que caracterizan al dibujo, la copia no será igual al original.

C. Dictado de figuras[10].

Este tipo de problemas forma parte de los juegos de comunicación en donde hay un grupo o alumno receptor y otro emisor, aunque sus roles sean posteriormente intercambiables. La comunicación –escrita en este caso- exige también, como en los otros tipos de problemas mencionados, un análisis de la figura presentada, una explicitación de propiedades, el uso de vocabulario específico, etc.

Habitualmente se divide a la clase en varios grupos. Cada grupo es "socio" de otro grupo. La mitad de los grupos (los llamaremos grupos A) recibe una misma figura y la otra mitad (grupos B) otra figura. En general ambas son parecidas, ya que se tratan de mismos conocimientos que hay que poner en juego en esa clase.

Cada grupo A elabora un mensaje escrito con instrucciones para que su grupo socio B, al recibirlo, pueda reproducir la figura. Los grupos B hacen sus mensajes para los grupos A. Luego se intercambian los mensajes y ambos grupos inician la construcción a partir de las instrucciones recibidas. Luego, se comparan y analizan los errores. Ganan los "socios" (grupo A y B) que hayan logrado reproducir ambos mensajes.

Se plantea a los niños que los mensajes no pueden tener dibujos con la finalidad de que tengan que esforzarse en explicitar el máximo de relaciones en palabras.

Este tipo de juego no es una actividad aislada. Es interesante que los alumnos puedan enfrentarse a este tipo de problemas a lo largo de un conjunto de varias clases, de tal modo que, el análisis de las dificultades y de los errores, se constituya en aprendizajes.

En general, los alumnos no logran en el primer intento reproducir la figura ya que presentan intencionalmente, un cierto nivel de desafío. Se trata de promover en los niños el entusiasmo por analizar las dificultades e incorporar nuevos conceptos con el fin de "volver a jugar".

Desde la perspectiva de los alumnos la puesta en común y el análisis de los errores son ocasiones para "jugar mejor la próxima vez". Por ello, que a los alumnos en el primer intento no les salga la reproducción, es motor de avance para seguir trabajando. En tanto que, desde la perspectiva del docente, el trabajo colectivo posterior al juego, será la ocasión para analizar las propiedades, las definiciones, el vocabulario, y para instalar aquello nuevo que pretende enseñar. Será necesario registrar entonces las conclusiones a las que se arriba y que se espera que los alumnos retengan como nuevos conocimientos. (Por ejemplo: "*si decimos rectángulo no hace falta decir que tiene cuatro lados*"; "*cuando hay rombos con sus diagonales trazadas no es necesario decir que son perpendiculares porque siempre lo son*"; "*desde hoy*

[10] Este tipo de actividades ha sido tomada del Documento 5 GCBA (1998). Ver también Saiz,1996.

llamaremos diámetro y radio a estos segmentos que....")

Las situaciones de dictado de figuras permiten tomar algunas decisiones luego de que los niños han jugado y se ha realizado la puesta en común:

- proponer en la clase siguiente a los alumnos la lectura y revisión de los mensajes que cada grupo ha elaborado. Será necesario para su reelaboración tomar en cuenta las conclusiones obtenidas a partir del trabajo colectivo.

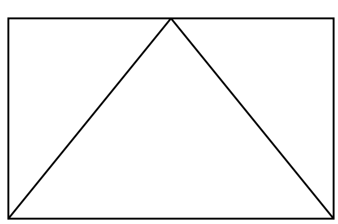
- Agregar en el siguiente juego, la restricción de que ganará el grupo que elabore el mensaje que haya sido eficaz y que además sea "el más corto posible". Esta restricción en la cantidad de palabras favorece la utilización de vocabulario específico y el análisis de la información contenida en una definición ("*No pongamos que tiene dos diagonales porque ya se sabe" o "escribamos triángulo rectángulo y ya va a saber que uno de los ángulos es recto"*, etc.)

Luego de que los niños han realizado algunas veces la actividad, se les puede proponer individualmente la simulación de un juego. Por ejemplo, la elaboración de un supuesto mensaje para una figura dada, o realizar la construcción a partir de un mensaje elaborado por el docente (Por ejemplo: *"Imaginate que estás jugando al juego de los mensajes y recibís esta figura ¿Qué mensaje lo más corto harías?"* o *"Si recibís estas instrucciones, ¿Qué dibujo harías?"* o bien *"¿Cuál de estos tres dibujos corresponde a este mensaje? ¿Por qué descartás los otros?" , ¿"Te animás a acortar este largo mensaje para esta figura?")*

En la Escuela 39 de Morón, la maestra de 3º año propone a sus alumnos la siguiente actividad, que tiene por objetivo que los niños describan e interpreten características de figuras. A diferencia de las actividades recién mencionadas, aquí hay un informante del grupo, en lugar de un mensaje escrito:

La docente tiene un dibujo. Cada grupo de 3 o 4 alumnos elige un secretario que será el único que verá el dibujo. Luego, deberá dictar instrucciones a los integrantes de su equipo para que ellos logren reproducir la figura que tiene la maestra

Uno de los dibujos con los que trabajaron es el siguiente:



Para que un grupo pueda reproducir la figura que no ha visto, el secretario deberá tomar decisiones en torno a cuáles son las características que deberá informar. Dichas decisiones deben considerar la necesidad de establecer relaciones, utilizar un vocabulario “comprensible”, dar información sobre las medidas.

Es así como uno de los secretarios enuncia el siguiente dictado: *Dibujen un rectángulo. Midan el lado de arriba y hagan una marca en la mitad. Hagan una raya de esa marca hasta la punta de abajo….Y para la otra punta también.*

Determinar si el dibujo es igual que el original (por superposición) permite al docente promover un análisis sobre el dictado realizado.

En varias de estas situaciones hay dibujos que coinciden con el original, en tanto que otros no. Este aspecto le posibilita al docente, confrontar los diferentes dictados y permitir a los alumnos evidenciar que información ha sido pertinente y cuál no. Por ejemplo: *Me olvidé de decirles cuánto miden los lados*

Por otro lado, resulta oportuno instalar el vocabulario pertinente. Por ejemplo, el docente podrá decir: *“Este punto se llama punto medio”* ; o bien, *“No se dice punta, se llama vértice”.* En general, las actividades de dictado de figuras habilitan al docente a incorporar el lenguaje geométrico a las relaciones que los alumnos establecen. Cuando un niño dice: *“Hacé una rayita de la punta de arriba a la de abajo”* está intentando caracterizar elementos de una figura. No es lo mismo ponerle “nombre” a esta caracterización, que aprenderlo desprovisto de un problema que le otorga sentido.

En este tipo de situaciones, también deberá estar presente - con mucha claridad- cuál es el conocimiento que se pretende que los alumnos aprendan. Es el contenido el que determina los diferentes dibujos que se les presentarán a los alumnos para que elaboren los dictados. En particular, con el dibujo anteriormente presentado, se pondrá en juego la idea de rectángulo, la idea punto medio y, seguramente, algunas cuestiones relacionadas con los triángulos.

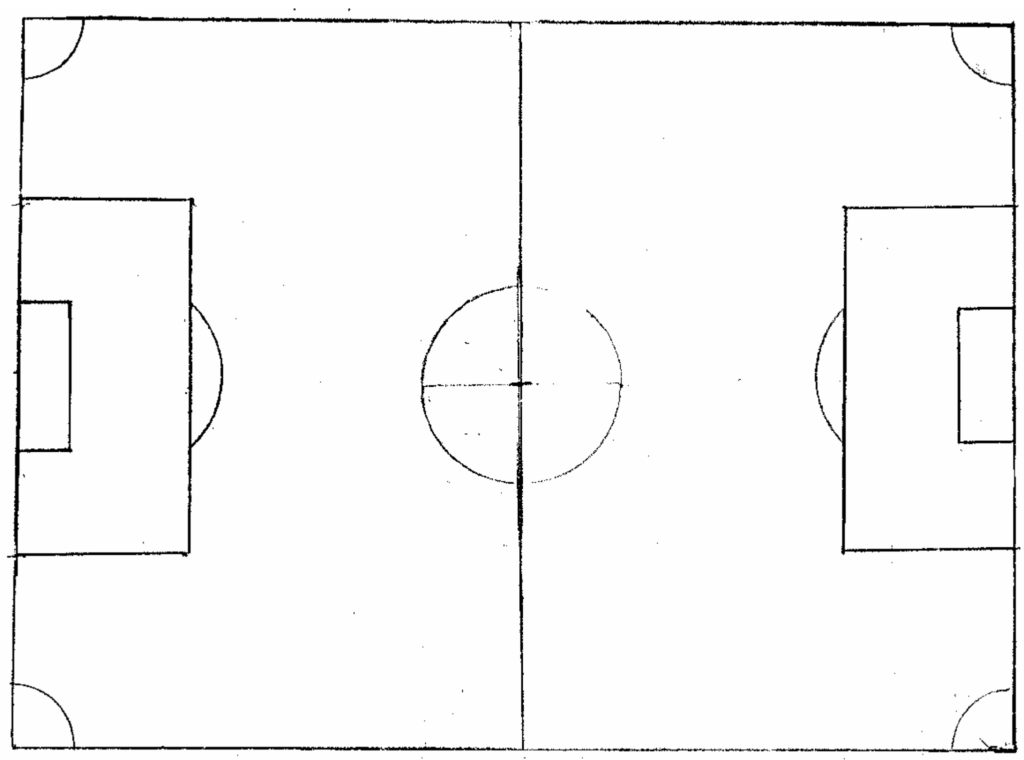
En la Escuela Nº 11 de Claromecó, la maestra Adriana Mariezcurrena propuso a sus alumnos de 5º año un dictado de figuras. En este caso, el “dictado” lo hizo la propia maestra y tenía la finalidad de que los alumnos recuperen ciertas relaciones de las figuras y algunos términos propios de la geometría:

- *Es un rectángulo cuya base es mayor que la altura*
- *Su lado mayor mide 19 cm y el lado menor 14 cm*
- *Dividir el rectángulo en dos partes iguales por su base*
- *Ubicar en ese segmento el punto medio*
- *Apoyado en el punto medio, trazar una circunferencia cuyo diámetro es de 3 cm y 6 mm, y su radio es de 1 cm y 8 mm*
- *Sobre cada lado menor del rectángulo marcar un punto que esté a 3 cm y 3 mm de cada vértice*
- *A partir del segmento marcado a la izquierda y a la derecha del rectángulo mayor, construir un rectángulo que tiene como base ese segmento y la*

altura es de 3 cm y 3 mm

- *Dentro de cada uno de esos rectángulos construir otro apoyado en la base del anterior, la base dista a 2 cm de él y la altura es de 1 cm*

La pregunta que les hace la maestra es la siguiente: *¿Qué les quedó armado?* Los alumnos producen diferentes dibujos (reproducimos solo uno y reducida por una cuestión de espacio):



Cuando todos los alumnos reconocen que la figura armada es similar a una cancha de fútbol, la maestra les pregunta: *¿Cómo harían para dibujar la región desde donde se patea el corner?* (también interroga sobre otros elementos que aún no han sido dibujados en la cancha).

Ante esta misma pregunta, en otra escuela, un alumno dice: *"Se puede hacer una semicircunferencia con el compás"* y otro le contesta: *"No, es un cuarto de circunferencia"*

Evidentemente, los datos, nombres y relaciones expresados en este dictado, resultaban familiares para los alumnos. Podría ocurrir que varios niños pregunten a sus compañeros o al docente sobre algunos elementos que desconocen, por ejemplo: *¿Qué es el punto medio?.* Esto dependerá de los saberes de los que ya disponen los alumnos. Pero también es una excelente ocasión para elaborar nuevas relaciones.

D. Construcción de figuras a partir de una colección de datos dados[11].

El desafío de las construcciones es considerar las propiedades ya conocidas de las figuras y tener en cuenta los datos dados. Exige a los alumnos tomar decisiones acerca del procedimiento de construcción y los instrumentos a utilizar *(¿Cómo encuentro el punto en el que se unen los dos lados?, ¿Cómo hago el ángulo recto sin la escuadra? ¿Dónde apoyo el compás?, etc.)*

Por otra parte, la situación de construcción de figuras a partir de ciertos datos dados exige analizar la "gama de posibles" figuras que responden al pedido. Como hemos analizado en el problema inicial de los triángulos, algunas construcciones son imposibles de ser realizadas porque hay contradicción entre sus datos o con las propiedades de esas figuras, otras construcciones tienen una sola solución, otras varias, otras infinitas.

Luego de la construcción realizada por los alumnos será interesante promover el análisis de las propiedades y recursos utilizados. En el trabajo colectivo se apuntará a:

- Que los alumnos comparen sus producciones en pequeños grupos y analicen la validez de las mismas.
- Que determinen si todas son o no soluciones correctas, si el problema tenia una, ninguna, varias o infinitas soluciones.
- Que comparen los diferentes procedimientos de construcción utilizados.
- Que expliciten las propiedades en las que se apoyaron *("Como sabía que la suma de los ángulos interiores del triángulo medía 180º, entonces...." o "Como me acordé que los rombos que no son cuadrados tienen sus diagonales diferentes, entonces...")*
- Etc.

Veamos algunos ejemplos de este tipo de problemas en las aulas.

En varias escuelas se les ha propuesto a alumnos de segundo y tercer ciclo actividades de construcción de figuras a partir de ciertos datos. Por ejemplo, en la Escuela 39 de Morón, la maestra presentó a sus alumnos de sexto año una construcción, enmarcada en un enunciado: *"Pablo tiene la posibilidad de construir una pileta triangular en el fondo de su casa. Tiene disponible una de las esquinas del mismo. Calculó poder hacerla con estas medidas, para aprovechar el espacio: 2m, 3m y 7m o bien 3m, 4m y 9m. Tratemos de hacer el dibujo de la pileta en el patio.*

La maestra acompaña a los alumnos al patio de la escuela. Comienzan a dibujarla en las esquinas del patio y se enfrentan a las primeras dificultades. La maestra propone anotar las dificultades que les surgieron para pensarlas en la clase siguiente.

[11] Este tipo de actividad se encuentra desarrollada en el Documento 5 GCBA (1998) y en el Pre Diseño del 2º ciclo GCBA (1999)

En la segunda clase, la maestra sugiere a los alumnos, intentar dibujar la pileta en una hoja cuadriculada, respetando la escala: 1 m = 2 cuadraditos

Algunos de los dibujos de los alumnos son como los siguientes:

Al confrontar varios de los dibujos producidos por los chicos, la maestra “pilotea” una discusión en la clase, con la finalidad de identificar aquellas características que van dando cuenta de la imposibilidad de la construcción. Varios chicos señalan que no se puede hacer, *“que habría que achicar la medida del tercer lado”*

Transcribimos parte del registro de los docentes de esta escuela:

El docente plantea nuevas construcciones para que los chicos establezcan comparaciones entre las medidas de los lados, a partir de un conjunto de preguntas:

¿En cuáles casos se puede armar un triángulo?

¿Siempre se puede?

¿Se puede con lo lados que midan 7 cm , 7 cm y 3 cm?

¿Y si miden 3 cm, 3 cm y 15 cm?

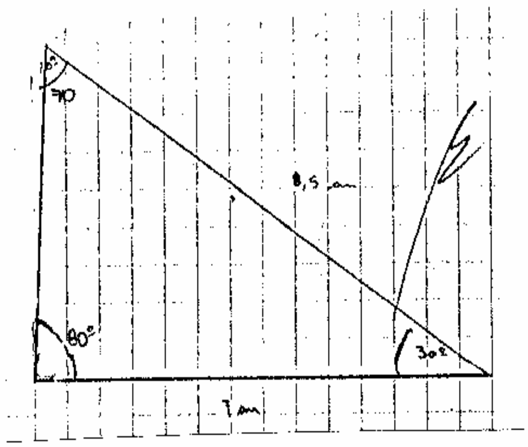
En este caso, la actividad de construcción fue un recurso que permitió a los alumnos identificar la presencia de una relación entre las medidas de los lados de un triángulo, para que tal triángulo exista, o se pueda dibujar. Arriban a una primera conclusión: *“Hay que achicar la medida del último lado”.*

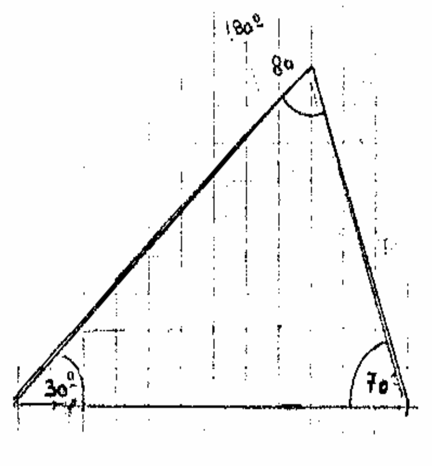
Otras expresiones que hemos oído de los alumnos dan cuenta de relaciones un poco más generales: *“Así no cierra el triángulo”.*

Precisamente, se busca que los alumnos vayan entrando en el juego de buscar argumentos que justifiquen la posibilidad o imposibilidad de realizar una construcción.

La maestra Marilina Barrios de la Escuela 4 de De La Garna, propuso a sus alumnos de 6º año la siguiente construcción: “*Construir un triángulo en el cual uno de sus ángulos mida 70º y otro de sus ángulos mida 30º*”

El primer objetivo era que los alumnos reconocieran la posibilidad de construir varios triángulos que cumplieran las condiciones planteadas. Producto del trabajo desplegado por los chicos y la comparación de los dibujos que realizaron, se verifica que hay muchas construcciones posibles(aunque no son del todo precisas):





Posteriormente, la maestra les propone una segunda parte del mismo problema: "*¿Qué dato agregarían al problema para que les quede una única solución?*"[12]

Esta pregunta exige a los alumnos un nuevo análisis en torno a las relaciones que caracterizan al triángulo. Poder determinar que otra información es necesaria para obtener un único triángulo demanda una actividad intelectual, propia de la geometría, en la cual, ya no es suficiente con ensayar una construcción. Se debe, en cierta forma, encontrar argumentos que justifiquen que con ese dato nuevo, efectivamente, la construcción será única.

Varios alumnos sostienen que si se agrega, como dato nuevo, la medida de uno de sus lados, el triángulo que se obtiene es único:

- ¿Qué dato debo agregar al problema para que me quede una única solución?
- Debo agregar además de las medidas de los ángulos, la medida de uno de sus lados.

Este alumno elabora una conjetura, que es incompleta. En este caso, es posible proponer a los alumnos que intenten construir varios triángulos diferentes con los valores de dos de sus ángulos y la medida de uno de sus lados, de manera tal de contradecir la conjetura elaborada por uno de los chicos.

Es parte del trabajo a desarrollar lograr que los alumnos se animen a ensayar, a probar, a buscar argumentos. Es esperable que en varias

[12] Hemos incluido este tipo de intervenciones de "transformación de enunciados" también en el Documento 1/2001 sobre la Enseñanza de la División.

ocasiones, las producciones de los chicos no se aproximen a la correcta, que sean incompletas, o erróneas, etc. No pretendemos que en el segundo ciclo los niños escriban las demostraciones o recurran al lenguaje algebraico.

Proponemos que los alumnos, a partir de las decisiones didácticas que se tomen, y los desafíos que se les presenten, comiencen a disfrutar de una nueva racionalidad.

E. Encontrar datos desconocidos de las figuras apoyándose en relaciones.

Este tipo de actividad tiene varias finalidades, que pueden ser contempladas a partir de ciertas decisiones didácticas. Por un lado, buscan profundizar el estudio de las figuras y de los cuerpos, pues implican la puesta en funcionamiento de propiedades como medio para anticipar[13] y establecer la "necesariedad" de ciertos resultados. Así mismo, permiten la elaboración de nuevas propiedades, de nuevas relaciones, de nuevos conceptos.

A su vez, intentan poner en evidencia los límites de ciertos recursos, como ser la percepción, los dibujos, la medida, etc.

Por otro lado, son actividades que introducen a los alumnos en el tratamiento de lo general. Es decir, ponen en duda que un único dibujo pueda dar cuenta de un propiedad que verifica toda una colección de figuras. Esta exigencia introduce la idea de que los dibujos pueden ser "bosquejos" para el análisis, representantes de una clasificación desprovistos de características particulares. (Por ejemplo, si se está trabajando en la investigación de alguna propiedad de los cuadriláteros, ¿qué dibujo representar?. Si bosquejo un rectángulo, obtendré propiedades y características no necesarias para un cuadrilátero cualquiera.)

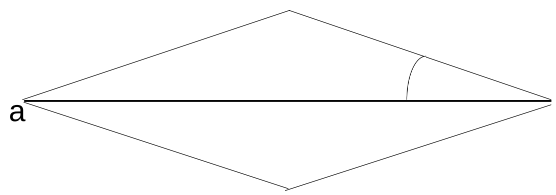
Este tipo de actividad es pertinente para fines del segundo ciclo, y deberá transformarse en eje central del trabajo en torno a la geometría en el tercer ciclo. Con esto queremos decir que el análisis de figuras y cuerpos continúa: se avanza en el establecimiento de relaciones más complejas (entre ellas, algunos teoremas clásicos de la geometría plana) así como en el desarrollo de la argumentación deductiva como forma de trabajo en geometría.

Hemos propuesto a docentes del tercer ciclo un conjunto de problemas que demandan la puesta en juego de propiedades de las figuras, y, sobre todo, el desarrollo de un trabajo argumentativo. Desarrollaremos a continuación un análisis de algunos de ellos.

---

[13] Poner en juego procedimientos de tipo anticipatorio implica aprender a inferir - a partir de los datos y con el apoyo de las propiedades - relaciones que no están explicitadas en el enunciado y que llevarán a establecer el carácter necesario de los resultados de manera independiente de la experimentación. Este aprendizaje es parte del trabajo en geometría.

Uno de los problemas[14] que se presentó a los docentes fue el siguiente:



El cuadrilátero abcd es un rombo.
El ángulo bca mide 25º

Calcular la medida del ángulo d

La resolución y el análisis del mismo permitió identificar que este problema tiene por objetivo que los niños recurran a algunas de las propiedades del rombo para determinar la medida del ángulo d, sin recurrir al transportador.

Algunos docentes sostuvieron que los alumnos podrían "ver" en el dibujo los triángulos abc y acd como isósceles. En consecuencia, el ángulo bac también debe medir 25º. Y, como la suma de los ángulos interiores de todo triángulo es 180º, el ángulo b debe medir 130º. Para finalmente arribar a que el ángulo d también mide 130º

Otros docentes dijeron que se podría pensar en que los ángulos a y c miden 50º cada uno, en consecuencia, la suma de los ángulos b y d debe ser 260º. Por lo tanto, al ser ambos iguales, el ángulo d debe medir 130º.

Transcribimos un párrafo del Documento 5 (1998):

En este problema, los alumnos deben apelar a relaciones que se verifican en el rombo y, a partir de estas relaciones, anticipar la medida del ángulo sin recurrir a la experiencia de medirlo. Este punto tiene además una notoria ventaja sobre el hecho de medir: si cambia el rombo muy probablemente cambien las medidas de los ángulos, pero las relaciones que se establecen son independientes de las medidas, por lo tanto, pueden volver a recurrir a ellas.

Otro de los problemas que promueve un análisis de las figuras y el establecimiento de relaciones entre los elementos que la componen es el siguiente:

"Sabiendo que uno de los ángulos de cierto paralelogramo mide 40º,

[14] Este problema fue extraído del Documento 5 GCBA (1998)

determinar si es posible o no que alguno de los otros ángulos mida 120º."[15]

Este problema pone en juego algunas propiedades de los paralelogramos. Apoyándose en dichas propiedades, es posible inferir que ningún ángulo de ese paralelogramo puede medir 120º.

Los argumentos que se podrían usar para arribar a esta conclusión están relacionados, por un lado, con reconocer que la suma de los ángulos interiores de cualquier cuadrilátero es 360º. Y, por otro lado, apoyarse en que los ángulos opuestos son iguales en todo paralelogramo.

En consecuencia, el opuesto al ángulo de 40º deberá medir 40º, en tanto que la suma de los otros dos, deberá medir 280º (para que la suma de los cuatro ángulos sea 360º). Finalmente, hay dos ángulos que miden 140º (ya que deben ser iguales)

Ahora bien, entrar en el juego de la demostración supone entonces, poder validar las afirmaciones o conjeturas sin recurrir a la constatación empírica. Pero no estamos pensando en exigir inmediatamente demostraciones tal como se entienden en matemática. Es un proceso largo que tendrá idas y vueltas y que debe ser provocado desde las actividades que se proponen para realizar en el aula.

¿Cuánta precisión requerimos para aceptar como válida una demostración? Si bien parece legítimo tener en la mira que los alumnos vayan mejorando la calidad de sus argumentaciones, es necesario poder ver esto como un proceso y aceptar de entrada justificaciones incompletas, argumentaciones imprecisas y escrituras "poco formales".

Es importante señalar que en el trabajo de entrada, por parte de los alumnos, en la producción de argumentaciones deductivas, se deberán aceptar algunas "primeras propiedades" como verdaderas, para permitir la elaboración de los argumentos que permitirán establecer el carácter necesario de otras.

Estas propiedades de partida resulta una cuestión compleja a elaborar. No es pertinente "sentenciar" aquí cuales son, pues dependen de cada grupo de alumnos, de cada situación.

Lo que sí es posible expresar son algunos criterios que permitan pensar esta complejidad, como por ejemplo, considerar los saberes de los alumnos; aquellas propiedades que resultan muy "evidentes" - aunque sabemos que el grado de "evidencia depende de los conocimientos disponibles- (por ejemplo

---

[15] También este problema propuesto fue tomado del Documento 5 , 1998, GCBA.

que la diagonal del cuadrado lo divide en dos triángulos iguales); y otras propiedades que resultan muy útiles para este tipo de trabajo, pero que su demostración requiere de elementos aún no disponibles por parte de los alumnos (por ejemplo, los criterios de congruencia de triángulos: se podrá apelar a la superposición de los mismos para verificar la congruencia, pero no es posible imaginar en séptimo año una demostración basada en rotaciones, traslaciones o simetría).

Hemos presentado en esta parte algunos tipos de problemas variados para trabajar con los alumnos en los diferentes contenidos y a lo largo de los ciclos. Evidentemente existen otros tipos de problemas también muy fecundos para el trabajo, que, por razones de espacio, no podemos incluir aquí.

Notas sobre el trabajo con los docentes

En el marco de los encuentros con los docentes surgieron algunos interrogantes que nos parece útil compartir porque, tal vez, sean preguntas también de los lectores que no asistieron a los encuentros.

Ensayamos para cada una, un intento de síntesis del tipo de cuestiones que se intentó promover. Presentamos nuestros puntos de vista, con la intención de promover la discusión y el debate institucional. Se incluyen en muchos casos, citas bibliográficas para ampliar el debate.

Algunas de las preguntas más frecuentes que surgieron fueron las siguientes:

¿Estudiar geometría en la escuela permitirá a los niños ubicarse mejor en el espacio real?

En principio, parece interesante distinguir, aunque haya aspectos en común y relaciones complejas entre ambos- el estudio del espacio y el estudio de la geometría. Entre algunas de las diferencias, señalan Berteloth y Salin[16], se encuentran las siguientes:

- Los conocimientos espaciales conciernen al espacio físico mientras los conocimientos geométricos a un espacio conceptualizado.

- Algunos conocimientos sobre el espacio físico (ubicación geográfica, lectura de planos, etc.) no forman parte de la disciplina matemática, a diferencia de los conocimientos geométricos, que sí pertenecen sin duda a esta disciplina.

[16] El artículo de Berteloth y Salin al que se hace referencia, está reproducido en el Documento 1/ 97 de Dirección de Educación Primaria, Pcia. Bs. As.

- Algunos conocimientos espaciales serían de adquisición más espontánea y no precisan de una enseñanza sistemática, como sí lo exigen los conocimientos geométricos.

- No parece nada evidente que estudiar geometría abone a la ubicación espacial. Muchas personas tienen una excelente ubicación espacial y no dominan los conocimientos geométricos de la escolaridad básica y viceversa. Parece que los procesos de aprendizaje de unos y otros son muy diferentes.

No hay, al menos por ahora, evidencia alguna de que estudiar geometría en la escuela sirva para ubicarse mejor en el espacio físico real.

Evidentemente, sería interesante profundizar en el estudio de aquellos aspectos sobre el espacio real que, aunque no formen parte de la geometría disciplinar, sí precisan de enseñanza sistemática, como por ejemplo la producción e interpretación de planos[17]. Tenemos, en la didáctica de la matemática, una importante área de vacancia allí.

Si aparentemente estudiar geometría no ayuda a ubicarse en el espacio real, ¿cuál es la finalidad de su enseñanza?

Muchas propuestas didácticas y documentos curriculares de diferentes años plantean desde sus fundamentos la idea de que enseñar matemática debe servir para la vida social. Es decir, adoptan una concepción instrumentalista de la enseñanza de la matemática.

Pensamos, por el contrario, que la actividad matemática en la escuela, no se debería centrar exclusivamente en su posibilidad de uso en la vida cotidiana. La motivación principal no debería ser la utilidad práctica, sino el desafío intelectual. *"Una centración exclusiva en la utilidad hace perder de vista a la matemática como producto cultural, como práctica, como forma de pensamiento"* (Marco General Pre Diseño GCBA, 1999)

Esta perspectiva no excluye la posibilidad de que las matemáticas escolares tengan muchas relaciones con la matemática de uso social. Incluso entre las preocupaciones actuales de la didáctica está cómo recuperar los conocimientos extraescolares de los alumnos como punto de partida para aprender lo nuevo (Ver documento de división, 2001).

Sin embargo, una de las razones principales por las cuales es importante su enseñanza es porque la escuela es un lugar de creación, de transmisión y de conservación de una parte seleccionada de la cultura. Y la geometría forma parte de ella. Como señala Artigue (1990): *"...lo que se propone la enseñanza de las matemáticas no es simplemente la transmisión de conocimientos matemáticos, sino , más globalmente, la transmisión de una cultura. Se trata de que los alumnos entren en el juego matemático".*

[17] Un trabajo en torno a la enseñanza del espacio se presenta en Broitman, 2000.

La Matemática es parte de la ciencia, los alumnos deben aprender en la escuela no solo sus resultados, sino también su forma de pensamiento y de producción de conocimiento. En este sentido, la geometría es un modelo de razonamiento y deducción muy importante para la formación cultural de los sujetos. *“Creemos que hay un modo de estudiar geometría que permite que los alumnos desarrollen un modo de pensar, propio de la matemática, que solo existe si la escuela lo provoca y al que creemos que todos los alumnos tienen derecho a acceder. Es la relación con el saber la que está en juego” (Doc. 5 GCBA, 1998)*

La escuela tiene la obligación y responsabilidad de socializar el saber. Los argumentos instrumentalistas tienen el riesgo de justificar la discriminación: “matemática útil” para algunos, “matemática como ciencia y cultura” para otros.

Compartimos el deseo de que los niños aprendan la matemática necesaria para la vida social. Pero somos mucho más ambiciosos. Apostamos a que todos los niños de la Pcia. de Buenos Aires, accedan , en los años de la escolaridad básica, al juego del pensamiento matemático, sientan gusto por los desafíos intelectuales, confíen en sí mismos como “hacedores” de conocimientos.

Y que puedan utilizar estos recursos para ser críticos y tomar decisiones.

Aunque la finalidad de la enseñanza de la geometría no sea el uso social, ¿los problemas de la vida cotidiana no son un buen recurso para interesar a los alumnos?

Desde nuestra perspectiva, como hemos mencionado, intentaremos interesar a los alumnos por el juego intelectual de producción de conocimientos, que puedan involucrarse activamente en debates matemáticos, por el simple interés de aprender y conocer. Es ese el “interés” que queremos fomentar en las clases.

Esto no significa que no haya algunos “buenos” problemas de la vida cotidiana que no puedan ser una buena vía de entrada al estudio de algunos conceptos geométricos (Por ejemplo: *¿Qué medidas tomar cuando se rompe un vidrio que hay que reemplazar?*), pero la mayor parte de los mismos precisará de problemas puramente geométricos[18].

Por otra parte, está estudiado que el hecho de que los problemas estén presentados en un contexto extramatemático no siempre implica que mejore la comprensión de los conceptos (Pre Diseño GCBA Marco General, 1999;

[18] Consideramos problemas “puramente geométricos” a aquellos que no tienen un contexto extramatemático. Todos los problemas que figuran en este documento son “puramente geométricos”.

Brissiaud, 1984). También existe el riesgo de forzar las relaciones entre conceptos y sus aplicaciones. (Por ejemplo, las vías del tren , famosos objetos matematizados en los manuales no son paralelas, no son siquiera líneas rectas ¿Por qué no estudiar el concepto de paralelismo donde "vive" y cobra sentido, es decir en las figuras geométricas?)

¿Cuál es el rol de los instrumentos geométricos?[19]

La enseñanza clásica de la geometría estuvo apoyada en dos pilares centrales: la fuerza de los algoritmos de construcción y la precisión en el uso de los instrumentos geométricos.

Sin embargo, la actividad geométrica no es una actividad empírica, es una actividad racional.

Podríamos afirmar, que el "uso del compás" no es un contenido de geometría. Sin embargo, su uso, bajo ciertas condiciones didácticas, exige poner en juego ciertas relaciones y propiedades de las figuras. Lo mismo ocurre con los otros instrumentos.

La actividad empírica pone, por el contrario, límites a la posibilidad de sacar conclusiones sobre objetos geométricos. Hemos señalado el salto que se intenta que los alumnos den en la clase desde "no me sale" a "es imposible porque…", o desde "me salió" a "es posible".

Esto se vincula con otro aspecto: la exigencia de la precisión en los dibujos de los alumnos. Pensamos que ésta es importante sólo en algunos problemas. Por ejemplo, para demostrar por qué no existen triángulos obtusángulos equiláteros, los dibujos de figuras en los que se puede apoyar una explicación no exigen precisión. Se trata de ensayos o bosquejos tomados como figuras de análisis. En cambio, en un problema en el que hay que construir una figura de acuerdo con un mensaje recibido, o copiar un dibujo, la precisión es necesaria para validar la construcción con el modelo.

¿Qué secuenciación dar a la enseñanza? ¿Primero los elementos , luego las figuras, y finalmente los cuerpos? ¿O al revés? ¿Por qué?

En la enseñanza de la matemática, durante años, se ha tenido una concepción acumulativa del aprendizaje y por lo tanto de la enseñanza: se enseña de a poco, se presenta de los más simple a lo más complejo. La idea era que los alumnos irían acumulando las porciones de conocimiento e integrándolas, etc. Es posible rastrear esta concepción para todos los contenidos[20].

---

[19] Ver Documento 5 GCBA (1998)
[20] Ver Charnay, 1994.

Hoy, frente al desarrollo de la didáctica de la matemática y la gran cantidad de estudios psicológicos sobre los procesos de construcción de conocimiento de los niños sobre diferentes objetos matemáticos, estamos en condiciones de reorientar la enseñanza teniendo en cuenta la necesaria complejidad de los objetos matemáticos y también los procesos cognitivos de los alumnos. Vale la pena desnaturalizar la idea de qué es lo simple y qué es lo complejo para los niños, conceptos que no siempre coinciden con el punto de vista de los adultos. Y por otra parte, consideramos que es importante resguardar el sentido de los conocimientos matemáticos, es decir, que los mismos estén ligados a los problemas que permiten resolver.

Como señala Gálvez, (1994) *"Hasta la fecha, ha predominado una concepción según la cual basta con descomponer un saber, en su modalidad cultural, en pequeños trocitos aislados, y luego organizar su ingestión por los alumnos, en períodos breves y bien delimitados, según secuencias determinadas sobre la base del análisis del propio saber".*

Estas ideas también tuvieron sus consecuencias en la enseñanza de la geometría: "primero enseñar elementos aislados (punto, recta, plano) y luego las figuras" o bien "primero enseñar cuerpos y luego figuras", bajo el supuesto didáctico de que había que partir de lo vivencial y concreto hacia la abstracción[21].

Con respecto a la primera idea, recordemos que el objeto de estudio de la EGB en geometría son las propiedades de figuras y cuerpos geométricos.

Esto no signifique que no sea importante definir o conceptualizar ciertos elementos (por ejemplo, distinguir segmento de recta), incorporar vocabulario nuevo (por ejemplo, "*vamos a llamar "vértice" a lo que Uds. hasta ahora llamaban punta"*), establecer acuerdos sobre formas de representación con los alumnos (por ej. "*en este problema vamos a usar las letras minúsculas para representar los vértices, pero tengan en cuenta que en nuestro libro usan siempre mayúsculas para los puntos y minúsculas para las rectas*) , o inventar nuevas denominaciones (por ej. *"entonces vamos a llamar "romboides rectangulares" a aquellos que tienen solamente un ángulo recto*).

Desde la perspectiva que hemos desarrollado, las denominaciones, representaciones, vocabulario, los acuerdos no son presentadas a los alumnos para ser usados luego, desprovistos de significado, sino que se institucionalizan o instalan como nuevo al servicio de los problemas con los que enfrentamos a los alumnos (por ejemplo, *"vamos a seguir acortando este mensaje, para ello vamos a tratar de usar la mayor cantidad de vocabulario que estuvimos anotando en este cartel"*).

Con respecto a la segunda cuestión, la secuenciación entre cuerpos y figuras, no hay estudios didácticos que permitan hoy día afirmar que el estudio

[21] Esta cuestión de "pasar de lo concreto a lo abstracto" se inscribe dentro de la problemática de los "malos entendidos" al aplicar las ideas piagetianas a la educación. Para ampliar estos aspectos sugerimos la lectura de Lerner, 1996; Castorina, 1998; Coll, 1983, 1998).

de los cuerpos o de las figuras geométricas deba preceder al otro. Cuerpos y figuras son objetos diferentes que pueden ser estudiados en el mismo ciclo o año[22].

Será interesante, en aquellos años en los que se estudien tanto figuras como cuerpos, más allá de las elecciones didácticas de “por dónde empezar”. presentar a los alumnos un conjunto de problemas que les permitan estudiar las relaciones entre figuras y cuerpos geométricos.

A modo de cierre

Hemos intentado mostrar a lo largo de este documento el trabajo realizado con un conjunto de docentes de diferentes escuelas y regiones de la Provincia de Bs. As. en torno a la enseñanza de la geometría en los tres ciclos de la EGB. Para ello, hemos compartido algunas de las actividades desarrolladas en los encuentros y algunas clases que los docentes ensayaron con sus alumnos. Esperamos que sean fértiles para el resto de los docentes.

Somos conscientes de que a lo largo de los encuentros, y de este documento, planteamos una gama de cuestiones didácticas que exceden la enseñanza de la geometría (¿qué matemática enseñar?, ¿con qué finalidad?, ¿qué tipo de intervenciones promover?, ¿qué estrategias didácticas utilizar para abordar el trabajo en el aula con la diversidad de los alumnos?, etc.). El trabajo que presentamos de los docentes, sabemos – así lo expresaron en los encuentros - que en muchos casos, les exigió revisar sus propios conocimientos geométricos, construir nuevas ideas sobre qué es un problema geométrico, probar en las aulas actividades e intervenciones en ciertos aspectos diferentes a las prácticas habituales.

Ambas cuestiones – tanto los aspectos más generales que subyacen a las decisiones didácticas como la revisión de los propios conocimientos geométricos – estuvieron presentes en los encuentros como discusiones o reflexiones constantemente. Este material tiene el propósito de provocar también estos debates en cada escuela.

Por último, nuestro profundo reconocimiento a los maestros. Nuestro agradecimiento también.

Horacio Itzcovich y Claudia Broitman

[22] Ver Pre Diseño Primer Ciclo, GCBA, 1999

Bibliografía

- Artigue, M. : "Epistemología y Didáctica". En Recherches en Didactique des Mathematiques 10, 1990
- Balacheff, N. (1987) : "Devolution d´un probleme et construction d´une conjecture. Le cas de la somme des angles d´un triangle". Cahier de Didactique des Mathematiques 39. Irem de Paris 7.
- Barallobres, G., Itzcovich, H. Y Sessa, C. (aún sin publicar): Documento sobre la enseñanza de la Geometría. Tercer Ciclo. Dirección de Currícula, Secretaría de Educación, Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.
- Berthelot, R. y Salin, M.H. (1994) :"La enseñanza del espacio y de la geometría en la escolaridad obligatoria. Tesis. Publicada en Documentos del PTFD, y reproducida en documento 1/97 PBA
- Brissiaud,R. (1984) "La lecture des énoncés de problemes" en INRP, Rencontres Pédagogiques. Nro 4. París
- Broitman ,C. e Itzcovich,H.(1991): "Taller de Resolución de Problemas". Dirección de Currículum. Secretaría de Educación de la M.C.B.A
- Broitman, C.(2000) "Reflexiones en torno a la enseñanza del espacio" en: De Cero a Cinco, Revista de Nivel Inicial de Novedades Educativas.
- Castorina, Coll y otros (1998): Piaget en la Educación. Debate en torno de sus aportaciones. Editorial Paidós, México.
- Castro, A. (2000): "Actividades de Exploración con cuerpos geométricos. Análisis de una propuesta de trabajo para la sala de cinco" en: Malajovich (comp.): Recorridos didácticos en la educación Inicial. Editorial Paidós. Bs. As.
- Charnay, R (1994): "Aprender por medio de la resolución de problemas". En: Didáctica de Matemáticas, Parra, C y Saiz, I.(Comp.),Editorial Paidós.
- Coll (1983): "Las aportaciones de la Psicología a la Educación. El caso de la psicología Genética y de los aprendizajes escolares" en Coll (comp.): Psicología genética y aprendizajes escolares. Madrid. Siglo XXI.
- Diseño Curricular Provincia de Bs. As. Tomo I (1999).
- Documento Nº 1 /97. Gabinete Pedagógico Curricular – Matemática- D.E.P. Prov. Bs. As.
- Documento Nº 1 /99. Gabinete Pedagógico Curricular – Matemática- D.E.P. Prov. Bs. As.
- Fregona, D. (1995): "Les figures planes comme "milieu" dans l'enseignement de la géométrie : interactions, contrats et transpositions didactiques". Thèse, Université de Bordeaux I
- Fregona,D. (1995) : "Diferentes dominios de declaración sobre las figuras". Ponencia de la IX CIAEM. Chile.
- Fuenlabrada,I. et al (1986) : "Los Cuadriláteros y sus Diagonales". Laboratorio de Psicomatemática Nro. 7. DIE. CINVESTAV. México.
- Gálvez, G.: "La Didáctica de la Matemática" en Didáctica de Matemáticas, Paidós, 1994.
- Gálvez,G. (1994) : "La Geometría, la psicogénesis de las nociones espaciales y la enseñanza de la geometría en la escuela elemental". En Parra, C y Saiz (comp.), Didáctica de Matemática. Paidós, Bs. As.

- Laborde ,C. (1991): “Deux usages complémentaires de la dimension sociale dans les situaciones d’apprentissage en mathématiques”. En Après Vygotski et Piaget, Pédagogies en Développement Recueils. De Boeck Université.
- Laborde,C. (1990) : “L´enseignement de la géométrie en tant que terrain d´exploitation de phénomènes didactiques”. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 9.3
- Lerner, D. (1996): "La enseñanza y el aprendizaje escolar" en Castorina, Ferreiro, Lerner, Oliveira: "Piaget- Vigotsky: contribuciones para plantear el debate". Paidós. Bs.As.
- Martinez,R. y Porras,M. (1997) : “Un enfoque alternativo de la Enseñanza de las figuras en el Plano en la E.G.B.”. Revista de Educación Matemática. Vol. 12 Nro 3. Universidad de Córdoba.
- Martinez,R. y Porras,M. (1998) : “La Geometría del Plano en la Escolaridad Obligatoria.”Revista Novedades Educativas Nro 78. Bs.As.
- Parra,C. ; Saiz,I. y Sadovsky, P. (1994): “Matemática y su Enseñanza”. Documento Curricular. Profesorado de Enseñanza Básica. Programa de Transformación de la Formación Docente. Ministerio de Cultura y Educación.
- Ponce, H. (2000): Enseñar y Aprender Matemática en el Segundo Ciclo. Ediciones Novedades Educativas. Bs. As.
- Sadovsky, Parra, Itzcovich, Broitman (1997): Documento de Actualización Didáctica Nº 5. Matemática. Segundo Ciclo de la EGB, MCBA
- Sadovsky, Parra, Itzcovich, Broitman (1999): Pre Diseño Curricular. Matemática.(Tomos: Marco Gral., EGB 1 y EGB 2). Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.
- Saiz,I. (1996) : “El aprendizaje de la Geometría en la EGB”. Revista Novedades Educativas Nº 71. Bs. As.
- Sessa C. (1998): “Acerca de la Enseñanza de la Geometría” en: Matemática. Temas de su didáctica. Cap.II. CONICET. Programa Prociencia. Bs. As.