

Acerca de la enseñanza de la geometría

El propósito de este capítulo es compartir algunas reflexiones en torno a la enseñanza de la geometría en la educación primaria.

PENSAR LAS PRÁCTICAS

Le pedimos que realice un punteo acerca de cuál podría ser la finalidad de la enseñanza de la geometría en la escuela primaria.

Desde el punto de vista de nuestras concepciones, la enseñanza de la geometría en la escuela primaria apunta a cuatro grandes objetivos:

- a. El estudio de las propiedades de las figuras y de los cuerpos geométricos.
- b. El estudio del espacio y de los movimientos, y de las relaciones que en él se dan.
- c. El inicio en un modo de pensar propio del saber geométrico.
- d. El reconocimiento de que la escuela es un lugar de creación, transformación y de conservación de una parte seleccionada de la cultura, entre otras, la geometría.

Nos detendremos a caracterizar cada uno de estos objetivos.

- a. El estudio de las propiedades de las figuras y de los cuerpos geométricos implica mucho más que reconocerlos perceptivamente y saber sus nombres. Implica tenerlos disponibles a fin de poder recurrir a ellos para resolver diferentes tipos de situaciones, así como utilizarlos para identificar nuevas propiedades sobre las figuras. En ambos casos, dichas propiedades permitirán dar cuenta de la validez de lo que se va produciendo.

Esto será posible a través de un trabajo que requiera a los alumnos

la puesta en juego de las características ya conocidas de las formas geométricas y que permita obtener nuevas relaciones entre objetos conocidos, o definir nuevos objetos a partir de sus propiedades.

b. El estudio de este eje de contenidos se refiere a una serie de conocimientos necesarios para el dominio de las **relaciones espaciales**, tales como la orientación en el espacio, la ubicación de un objeto o de una persona, la organización de los desplazamientos, la comunicación de posiciones y desplazamientos, y la producción e interpretación de representaciones planas del espacio.

Parte de estos conocimientos se desarrolla en los niños antes de recibir alguna enseñanza sistemática. Estos aprendizajes extraescolares se dan a través de las propias acciones que el niño realiza en el espacio y con los objetos que están en él. Por ejemplo, los desplazamientos en el espacio físico no requieren de la enseñanza para que los niños pequeños los construyan. Esto puede observarse desde muy temprana edad, cuando se desplazan por el espacio sin “perdersé”; por ejemplo, cuando salen de la sala de Jardín de Infantes para ir al baño y luego regresan realizando el recorrido inverso.

Si bien es cierto que los niños construyen algunos conocimientos espaciales independientemente de la enseñanza formal, esto no significa que no tengan nada que aprender, en forma sistemática a lo largo de la escolaridad, en cuanto al dominio del espacio. Esos aprendizajes asistemáticos no son suficientes para resolver con éxito muchas situaciones espaciales; por ejemplo, ante la necesidad de establecer puntos de referencia para poder ubicarse o ubicar un objeto en el espacio; para poder interpretar la información en un plano, etcétera.

c. El **modo de pensar geométrico** supone poder apoyarse en propiedades ya estudiadas de las figuras y de los cuerpos para poder anticipar relaciones desconocidas al resolver problemas. Se trata de poder obtener la solución de ese problema —en principio, desconocida— a partir de los conocimientos ya disponibles. A esto, llamamos un *proceso anticipatorio*. Por otra parte, se trata también de poder saber que dicho resultado es el correcto porque las propiedades puestas en juego lo garantizan. A esto, llamamos *validación*.

Pensando este trabajo como los inicios de una vía de entrada privilegiada al razonamiento deductivo, es necesario diseñar una propuesta que permita evidenciar los límites de los dibujos y las medidas. “Creemos que hay un modo de estudiar geometría que permite que los alumnos desarrollen un modo de pensar propio de la matemática, que sólo existe si la escuela lo provoca y al que creemos que todos los alumnos tienen derecho a acceder. Es la relación con el saber lo que está en juego”¹.

d. Una de las razones por las que, en general, la enseñanza de la geometría tiene menos “presencia” en las aulas es porque no se le reconoce, de manera sencilla, una vinculación directa con su uso en la vida diaria. Las ideas referidas a que los niños sólo podrán aprender aquello que les resulte cotidiano y útil responden a una corriente que se encuadra en una concepción de la matemática instrumentalista.

Estas concepciones provocan forzamientos en los conceptos para vincularlos a los objetos reales, así, se los matematiza; como por ejemplo, al enseñar el concepto de *paralelas* a través de las vías del tren. Estas no son paralelas, ni siquiera son líneas rectas. Nuestra propuesta es enseñar los objetos geométricos donde estos “viven”, es decir, en las figuras geométricas. “Una centración exclusiva en la utilidad hace perder de vista a la matemática como producto cultural, como práctica, como forma de pensamiento”².

Si bien hay problemas interesantes que vinculan lo cotidiano con el saber geométrico —por ejemplo: qué medidas tomar cuando hay que reponer el vidrio de una ventana—, hay todo un universo de problemas intramatemáticos, puramente geométricos, que otorgan sentido por sí mismos a la enseñanza de la geometría.

¿Qué entendemos por *trabajo geométrico* en la escuela?

En términos generales, la enseñanza de la geometría casi siempre ha estado ligada a un tratamiento que supone la “aparición natural” de un

¹ Ver Documento N.º 5 en P. Sadovsky, C. Parra, H. Itzcovich y C. Broitman (1996): *La enseñanza de la geometría en el segundo ciclo*. Bs. As.: GCBA, Secretaría de Educación, Dirección de Curricula.

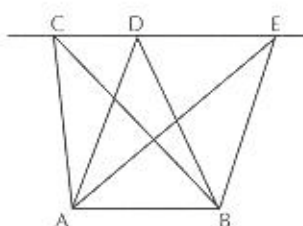
² Marco general del Pre-Diseño Curricular (1999), Bs. As.: GCBA, Secretaría de Educación, Dirección de Curricula.

concepto geométrico como un enunciado general, a partir de la observación, de la percepción, de presentar definiciones y de algunas mediciones que establezcan los alumnos sobre las representaciones de los objetos geométricos. Por ejemplo, en Segundo Ciclo, se espera que los alumnos establezcan el enunciado general acerca de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° . Se intenta “demostrar” esta relación a través del recorte de los ángulos del triángulo, del calcaído de los tres ángulos de manera consecutiva o de la medición de los tres ángulos y de su posterior suma, etcétera. Sabemos que es inevitable que, en toda medición, siempre haya error; cabe preguntarse entonces, ¿cuál es la relación entre las constataciones empíricas que los alumnos encuentran y la propiedad en cuestión? ¿Por qué, si han obtenido valores cercanos a los 180° , el enunciado general dice 180° ? ¿Quién explica la diferencia entre lo realmente hallado y la formulación teórica? Este tipo de enseñanza reduce la actividad del alumno a una “cuestión de fe”. Se cree en la propiedad, porque el docente lo dice.

El tipo de práctica que planteamos para el trabajo en geometría intenta no basarse en el trabajo empírico de modo tal de insertar lo geométrico en el terreno de la deducción. La actividad matemática no es mirar y descubrir: es crear, producir, argumentar.

PENSAR LAS PRÁCTICAS

- a. Sin medir, decida cuál de los triángulos (ABC, ABD o AEB) tiene mayor área, sabiendo que la recta CE es paralela al segmento AB:



- b. Identifique qué conocimientos son necesarios para poder resolver el problema.
c. Detalle los modos posibles de validación.

Para resolver este problema, será necesario advertir que los tres triángulos tienen la misma base y la misma altura, por lo tanto, sus áreas serán iguales.

En general, los alumnos contestan que “se ve” que el triángulo ADB tiene mayor área basándose en lo perceptivo. Esta respuesta no es casual. Si los alumnos despliegan frecuentemente un trabajo geométrico basado en la observación, en la manipulación y en la medición, es lógico que “miren”, que “recorten y peguen” o que “midan”, intentando determinar cuál tiene mayor área. Estas acciones sobre los dibujos podrían generar contradicciones difíciles de salvar. Por ejemplo, si un alumno mide y dice que el de mayor área es el triángulo ADB, y otro mide y calcula que el de mayor área es el triángulo ACB, ¿quién zanja esta diferencia? Sobre todo, si ambos “midieron bien”, y los errores son aquellos propios del hecho de medir (un milímetro de diferencia en la regla, la escuadra apenas torcida, un ojo que no es muy preciso, etcétera).

Desde la perspectiva que adoptamos, este tipo de trabajo empírico aleja a los alumnos del tipo de quehacer matemático al que adherimos. Sin la posibilidad de elaborar argumentos que sostengan lo que se responde, es decir, sin validación, no hay geometría (ni matemática), sea cual sea el año escolar del que se trate.

Cuando hablamos de *validación*, no estamos pensando en la elaboración acabada de un teorema con abrumantes consideraciones formales.

Hablamos de que un alumno debe ser capaz de argumentar, de fundamentar sus conclusiones, de considerar los fundamentos de sus compañeros para aceptarlos o rechazarlos, de hacer el esfuerzo de entender la demostración hecha por otro, de intentar proponer él mismo una demostración.

Pero a su vez, efectuada la medición y aplicada la fórmula, los valores encontrados son esos, pero para muchos alumnos, podrían haber sido otros. En lugar de validación, hay contingencia, la cual queda claramente expresada en términos de los alumnos cuando dicen: “A mí me dio..., a vos, ¿cuánto te dio?”.

Para que los alumnos entren en un trabajo argumentativo, habrá que ofrecerles situaciones didácticas, adecuadas al nivel de su escolaridad, que les muestren la insuficiencia de lo experimental como

criterio de validación. Lo importante de este tipo de propuestas es que permiten que aparezca lo deductivo por sobre lo experimental, aunque lo experimental forme parte de un primer momento del trabajo con un tinte más exploratorio. Las relaciones establecidas son generales, es decir, independientes de las medidas de los lados de los triángulos; en este caso: “Si tres triángulos tienen la misma altura por pertenecer sus vértices a rectas paralelas y tienen la misma base, entonces tienen igual área”. Con este tipo de argumentación, cada problema de comparación de áreas de triángulos no es un caso particular en el que hay que construir nuevo conocimiento como si nada de lo aprendido fuera útil. Se pueden reutilizar los conocimientos recurriendo a ellos independientemente de las medidas.

Resumiendo, para que una situación sea un *problema geométrico* para los alumnos, es necesario que³:

- Implice un cierto nivel de dificultad, presente un desafío, tenga algo de “novedad” para los alumnos.
- Exija usar los conocimientos previos, pero que estos no sean totalmente suficientes.
- Para resolverlo, se deban poner en juego las propiedades de los objetos geométricos.
- El problema ponga en interacción al alumno con objetos que ya no pertenecen al espacio físico, sino a un espacio conceptualizado representado por las figuras-cuerpos.
- En la resolución del problema, los dibujos no permitan arribar a la respuesta por simple constatación sensorial.
- La validación de la respuesta dada al problema —es decir, la decisión autónoma del alumno acerca de la verdad o falsedad de la respuesta— no se establezca empíricamente, sino que se apoye en las propiedades de los objetos geométricos; aunque en algunas instancias exploratorias, se puedan aceptar otros modos de corroborar.
- Las argumentaciones a partir de las propiedades conocidas de los cuerpos y figuras produzcan un nuevo conocimiento acerca de estos últimos.

³ Sessa, C. (1998): “Acercas de la enseñanza de la geometría”, en *Matemática, temas de su didáctica*. Bs. As.: Conicet.

El estudio del espacio

Los conocimientos espaciales están vinculados a las relaciones con el espacio, sus representaciones, sus desplazamientos, etcétera.

En otros términos, se trata de ideas espaciales construidas para modelizar el espacio físico, vinculadas a él, que sirven para resolver problemas del espacio real. Esto no significa confundir el espacio físico y el espacio que estudia la matemática. Con los mismos criterios con los que analizábamos anteriormente la participación de lo empírico en la construcción del conocimiento geométrico, sostenemos que los niños no aprenden los conocimientos espaciales a través de observar, tocar, etcétera.

Los conocimientos espaciales no se construyen por abstracción directa del espacio real, sino a partir de utilizar las propias conceptualizaciones en la resolución de problemas que plantea dicho espacio. Y esas conceptualizaciones constituyen los conocimientos espaciales de los alumnos. Estas avanzarán frente a la resolución de problemas espaciales. Existe una distinción entre un espacio físico o real y un espacio conceptualizado del que se ocupa la matemática.

Mencionemos un ejemplo que manifiesta esta diferencia. Un plano es una representación de la distribución de calles de una ciudad real, que puede ser utilizado por una persona para decidir cómo realizar desplazamientos en el lugar representado por ese plano, pero el plano no se confunde con el espacio físico al que representa.

En síntesis, el espacio al que se refiere la matemática no tiene existencia material, como ningún objeto matemático la tiene.

Los problemas vinculados a los conocimientos espaciales

Estos conocimientos se ponen en juego para resolver problemas cuya finalidad concierne al espacio sensible y pueden referirse a diferentes acciones, como: construir, desplazarse, desplazar objetos, ubicar objetos en el espacio, ubicarse a sí mismos, dibujar, etcétera⁴.

⁴ Quaranta, M. E. y B. Ressa de Moreno (2003). *Orientaciones didácticas para el Nivel Inicial (Matemática)*. Bs. As.: GCBA. Dirección Gral. de Cultura y Educación.

El lenguaje y las representaciones espaciales permiten comunicar informaciones que sustituyen la percepción. El éxito o el fracaso son determinados por el sujeto por comparación entre el resultado esperado y el resultado obtenido (Salin y Berthelot, 1994).

Por ejemplo, un niño anticipa que una pelota entrará en un aro determinado en función de representaciones mentales de la forma y el tamaño de ambos, y de la dirección en la que se desplazará la pelota. Esta anticipación podrá verificarse, ajustarse, etcétera, a partir del resultado del lanzamiento de la pelota.

Estos problemas varían en función del tipo de espacio del que se trate. Guy Brousseau señala que la variable "tamaño del espacio" interviene decisivamente en la resolución de problemas espaciales. Distingue tres valores para esta variable: el *macroespacio*, el *mesoespacio* y el *microespacio*, sobre los que nos detendremos a continuación. Estos valores conllevan modos diferentes de relación con los objetos incluidos en ese sector del espacio y, por lo tanto, implican modelos conceptuales distintos para orientar las acciones del sujeto. Por otra parte, en las relaciones que los sujetos deben establecer con el espacio para poder representarlo, también el tamaño es una de las variables importantes para considerar. En este sentido, según el "tamaño del espacio" con el cual interactúe el sujeto, se ponen en funcionamiento modelos conceptuales diferentes para realizar representaciones gráficas de ese espacio.

El macroespacio

Esta categoría corresponde a un sector del espacio cuya magnitud es tal que no puede obtenerse una imagen de conjunto de él sin realizar desplazamientos, o puede obtenerse mediante conceptualizaciones que permitan reunir representaciones sucesivas. Esto es así porque, en estas dimensiones, la percepción directa de la totalidad es inaccesible. Es posible distinguir varios tipos de macroespacios como, por ejemplo, el urbano, el rural, el marítimo. Es imposible obtener una visión global simultánea de una ciudad, ese espacio sólo puede abarcarse a través de una sucesión de visiones locales, separadas entre sí por los desplazamientos que realiza el sujeto sobre la superficie terrestre. Para orientar

sus desplazamientos, debe construir una representación global del macroespacio, ligando sus visiones parciales, para recuperar la continuidad del espacio recorrido. En el caso del macroespacio urbano, existen múltiples objetos e informaciones que el sujeto puede utilizar como puntos de referencia para estructurar su representación: los nombres y la numeración de las calles, los edificios públicos, comercios, las plazas, etcétera. En el macroespacio rural, si bien la cantidad de signos para la diferenciación precisa de sus partes es menor que en el macroespacio urbano, también existen elementos que permiten ser utilizados como puntos de referencia; por ejemplo, los mojones que indican el kilometraje, los nombres de las localidades, los accidentes naturales (montes, ríos, etcétera). En cambio, en el macroespacio marítimo, como también en el desértico, no es posible recurrir a una sucesión de encuentros con determinados objetos o elementos para reproducir un trayecto. La única manera de orientarse y desplazarse en ellos es a través de conceptualizaciones que reconstruyan las informaciones que es posible obtener a partir de las escasísimas referencias que aparecen (como, por ejemplo, la posición de unas estrellas determinadas). El conocimiento sobre las representaciones del espacio y las relaciones que estas representaciones permitan establecer posibilitará la toma de decisiones en cada uno de estos ámbitos. Por otra parte, la comprobación de cuán acertadas han resultado las decisiones para actuar sobre dicho espacio se obtendrá a partir de evaluar si se logró o no la finalidad perseguida.

En otros términos, mientras menos puntos de referencia tenga el sujeto a su disposición, mayor necesidad tendrá de recurrir a una teoría para tomar decisiones, ya que los datos de la percepción no resultan suficientes. La escuela debe tomar a su cargo la enseñanza de la orientación en el espacio para garantizar que todos los alumnos alcancen un dominio en sus relaciones con estas dimensiones del espacio, tradicionalmente libradas a los aprendizajes espontáneos. Dado que no todos los sujetos alcanzan estos conocimientos de manera espontánea, se evidencia la necesidad de que existan intervenciones explícitas —es decir, educativas— dirigidas a que todos lleguen a aprender a desplazarse autónomamente en un ámbito de esta dimensión.

En relación con las representaciones gráficas del macroespacio, es necesario establecer algunas distinciones. Tanto el macroespacio marítimo, como el desértico, exigen conocimientos matemáticos inaccesibles aún a los niños. Sin embargo, cuando los chicos van a la estación de tren, a la plaza, al zoológico a otros lugares por diferentes caminos (macroespacio urbano o rural), y los docentes plantean como problema la posibilidad de acceder a estos sitios siguiendo recorridos diferentes, estableciendo reflexiones acerca de qué podrá encontrarse a lo largo del recorrido, qué se irá encontrando en el recorrido de regreso, cómo comunicar este recorrido a otra persona, etcétera, la representación gráfica o la interpretación de representaciones ofrecidas por el docente o por la cultura —a través de planos, por ejemplo— constituyen oportunidades para que los niños comiencen a enfrentarse al problema de orientarse en el espacio y representar recorridos, anticiparlos y comunicarlos.

¿Qué condiciones podríamos pensar para que una situación tal constituya verdaderamente un problema fértil para nuestros alumnos? Si en la visita a la plaza, por ejemplo, el recorrido de regreso hacia la escuela se realiza por calles diferentes por las que fueron, los niños podrían hacer un registro de los diversos lugares por los que pasaron: distintos negocios, casas conocidas, cantidad de cuadras, etcétera. Con esos registros, ya en la clase, podrán elaborar una representación de ese espacio recorrido. Las comparaciones posteriores entre las diversas representaciones que puedan surgir deberían estar dirigidas a reflexionar acerca de la utilidad del registro previo y las dificultades vinculadas con su representación. Si en diferentes dibujos aparecieran los mismos lugares en distinto orden, un debate colectivo a propósito de su confrontación dará lugar a analizar cómo se puede hacer para estar seguro de en qué orden poner los diferentes lugares, qué cosas no pueden faltar para no perderse, por ejemplo, dónde doblar o hacia qué lado hacerlo, etcétera. Asumimos que los alumnos no podrán realizar dibujos que respeten las relaciones de perspectiva ni de tamaños de los objetos representados. Lo que interesa de la situación es que puedan tomar contacto con la necesidad de establecer puntos de referencia para poder orientarse y desplazarse en

el macroespacio. También sería interesante que se discutiera si un mismo registro puede servir para orientarse por el mismo camino tanto a la ida como a la vuelta, y en qué orden entonces se irán encontrando, en cada caso, las referencias anotadas en el papel.

El mesoespacio

Esta categoría se asigna a un recorte del espacio que resulta accesible a una visión global desde una misma posición, aunque no de un solo "vistazo", sino con desfases temporales mínimos, es decir que, para acceder a una visión completa, se requiere de movimientos. Por ejemplo, el espacio que contiene un aula puede ser recorrido por el sujeto tanto interior como exteriormente. Contiene objetos fijos, que funcionan como puntos de referencia para los desplazamientos del sujeto por su interior: muebles, puertas, ventanas, paredes, etcétera. Las otras aulas, el patio, la puerta de entrada a la escuela, etcétera, serán los puntos de referencia para los desplazamientos exteriores.

Los desplazamientos del sujeto están restringidos y deben ser realizados en función de la localización de los objetos. Esto determina trayectos obligados, como los pasillos, las escaleras, los espacios entre mesas, etcétera, que implican la diferenciación entre espacios vacíos y llenos. Se puede decir que el *mesoespacio* es el espacio de los desplazamientos del sujeto. Las experiencias que el sujeto obtiene en estos desplazamientos son acotadas. Los puntos de vista están restringidos, por una parte, por los recorridos posibles entre los objetos fijos y, por otra parte, a causa de que los desplazamientos se realizan mayoritariamente en postura erecta; con lo cual, las direcciones horizontal y vertical se constituyen en direcciones básicas para la organización del mesoespacio. Esto no significa que sea imposible para el sujeto adoptar otras perspectivas, pero en la medida que no son usuales, no contribuyen significativamente a la estructuración del mesoespacio.

Para lograr un mayor dominio en los desplazamientos, no procediendo sistemáticamente por ensayo y error, es necesario construir una representación intelectual del mesoespacio. Si bien la exigencia de anticipaciones basadas en conceptualizaciones que colaboren en la toma

de decisiones aquí es menor que la necesaria para desempeñarse en el macroespacio, la enseñanza puede intervenir para favorecer su dominio por parte de todos los alumnos. Por ejemplo, desplazar un mueble de una habitación a otra puede ser una tarea que requiera algo más que una estimación visual. Si no se realiza una anticipación midiendo el espacio determinado por la puerta en relación con las dimensiones del mueble, en muchos casos, descubriremos que el mueble “no pasa” una vez que ya nos hayamos tomado el trabajo de desplazarlo.

En relación con las representaciones gráficas del mesoespacio, un ejemplo de situación posible es pedirles a los alumnos que realicen un plano del aula para guardar de recuerdo al terminar el año, o del patio, para enviar a chicos que no lo conocen. Otro tipo de situación posible consiste en pedirles que inventen un juego desplazando la pelota en el patio y luego lo representen con lápiz y papel para poder repetirlo tal cual al día siguiente o para poder comunicarlo a un compañero que faltó. Hemos tenido la posibilidad de observar producciones de este tipo en las cuales, a través de líneas, flechas y dibujos, los niños han podido representar secuencias, como por ejemplo: hacer picar la pelota tres veces, correr hasta el árbol, dar una vuelta alrededor de él, tirar la pelota para arriba, hacerla picar tres veces, volver corriendo hasta donde está la maestra.

El microespacio

Este es el sector del espacio más próximo al sujeto y el que contiene objetos accesibles, tanto a la visión, como a la manipulación. El sujeto puede mover el objeto y a sí mismo prácticamente en cualquier dirección. Por lo tanto, es posible establecer cualquier perspectiva del objeto. A diferencia de lo que sucede en los otros tamaños del espacio, la abundancia de información que le provee la manipulación del objeto determina que, para seleccionar una acción determinada, el sujeto no necesite hacer una anticipación precisa de sus efectos, ni coordinar de antemano una secuencia de acciones. Puede intentar obtener cierto efecto todas las veces que quiera, hasta lograrlo. De hecho, en general, no necesita de muchos ensayos ya que su dominio del microespacio, tanto como la cantidad de información inmediata de la que dispone, le permiten encontrar rápidamente las acciones. Incluso en acciones

irreversibles, como la de cortar con una tijera siguiendo un contorno, la percepción inmediata del efecto permite ir haciendo correcciones a medida que se avanza. Muchas de las situaciones que ocurren en el microespacio son altamente tolerantes a la búsqueda empírica de la solución. Es decir, esta búsqueda no se vuelve muy costosa, como sucede en cambio con los otros tamaños de espacio, que requieren con más fuerza entonces de anticipaciones apoyadas en conceptualizaciones que economicen las búsquedas empíricas.

Sin embargo, es posible encontrar situaciones en el microespacio en las que sea necesaria una planificación cuidadosa de la acción y, en consecuencia, la intervención de representaciones espaciales. Por ejemplo, si los alumnos tienen que determinar la cantidad de caras que tiene un cubo para poder luego solicitarle a la maestra la cantidad de cuadrados necesarios para cubrirlas todas. Esta situación requiere poner en juego los conocimientos previos acerca de las figuras geométricas, sus características, su denominación, etcétera. Es decir, requiere tomar decisiones en el momento de la resolución, anticipaciones de lo que se necesitará para “forrar” el cubo.

Una situación que hiciera intervenir representaciones gráficas del microespacio podría consistir en pedir a los alumnos que dibujen un objeto apoyado sobre la mesa tal cual lo ven. Por ejemplo, si se apoya un muñeco sentado con un brazo levantado y el otro hacia abajo en la mitad de la mesa, y los niños se ubican en cuatro sectores de manera que algunos verán al muñeco de frente, otros de un costado con el brazo levantado, otros de atrás y los otros del otro costado con el brazo hacia abajo, las representaciones mostrarán diferencias que son producto de los diferentes puntos de vista desde los cuales se han producido los dibujos. Analizar dichas diferencias y concienciar acerca de cómo se ve el muñeco en función del lugar desde donde se lo observa es lo que nos interesa.

Resumiendo: cuando los chicos van a la estación de tren, a la plaza, al zoológico o a otros lugares por diferentes caminos, y los docentes hacen observar esto (porque justamente salen a comprobar este hecho), o cuando precisan y describen la ubicación de determinados objetos en la clase o en el patio, o bien, cuando trabajan haciendo un plano para que otro grupo encuentre algo que escondieron, cuando

discuten cómo se ve un objeto dibujado desde diferentes puntos de vista, están resolviendo problemas espaciales, que involucran los tres valores de la variable “tamaño del espacio” que vimos.

Estas situaciones son factibles de ser presentadas al mismo tiempo, y no podría afirmarse que uno de los tamaños del espacio se domina “antes” que otro. Es decir, no se trata de “niveles de adquisición”: esos tamaños deben abordarse simultáneamente o, sin un orden preestablecido, debe asegurarse el tratamiento de diferentes tamaños del espacio.

PENSAR LAS PRÁCTICAS

¿Por qué cree que es importante, para un docente, conocer esta referencia al tamaño del espacio?

A continuación, incluimos una situación de enseñanza destinada a trabajar ubicaciones espaciales y puntos de referencia.

Dictado de maquetas⁵

Materiales:

Para cada grupo de alumnos, se contará con los elementos necesarios para construir una maqueta de una granja. Por ejemplo, 1 casa, 2 caballos, 2 vacas, 1 ternero, 4 vallas, 2 árboles diferentes, 2 ovejas, 1 pastor, etcétera.

Además, existirá un plano de apoyo, por ejemplo, una hoja tamaño oficio.

Organización de la clase:

Al tratarse de una situación de comunicación en la cual un grupo funciona como emisor de información a otro grupo que la recibe, conviene organizar la clase en una cantidad par de grupos. Así, por ejemplo, si se forman seis grupos, el A interactuará con el grupo B; el C, con el D; el E, con el F; etcétera.

A cada par de grupos, se le entrega un equipo idéntico de material.

⁵ Sobre una situación de enseñanza, ver Irma Saiz (2003): “La derecha... ¿de quién? Ubicación espacial en el Nivel Inicial y en el Primer Ciclo de la EGB”, en Mabel Panizza (comp.): *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el Primer Ciclo de la EGB. Análisis y Propuestas*. Buenos Aires: Paidós.

Consigna:

Si se hubieran constituido, por ejemplo, 6 grupos, se advertirá que el A trabajará con el B, el grupo C trabajará con el D, y el E trabajará con el F. Los grupos A, C y E tienen que construir la granja sobre la hoja de papel. Cuiden que los otros compañeros no vean cómo lo hacen. Luego deberán darle indicaciones al otro grupo para que ellos puedan ubicar todo el material de la misma forma que ustedes lo hicieron. Cuando terminen, vamos a comparar las dos granjas, veremos si quedaron iguales y analizaremos qué pasó.

Comentarios:

Es muy importante repetir la experiencia varias veces en diferentes momentos, cambiando los roles que ejercieron los grupos: los emisores del dictado serán los grupos B, D y F; y los receptores serán los grupos A, C y E, respectivamente; y así irán alternando.

Es importante hacer esto para que todos puedan participar como emisores y como receptores de los mensajes, ya que la tarea involucrada en cada uno de estos roles hace intervenir diferentes formas de los conocimientos espaciales requeridos. La repetición de la experiencia también es importante porque pasar por la situación en reiteradas oportunidades permite que los alumnos vayan ajustando poco a poco sus mensajes basándose en las experiencias anteriores y en los conocimientos que hayan circulado en los análisis colectivos.

En general, las primeras veces que juegan, los chicos dan por supuestas muchas relaciones. Recién cuando descubren que los otros no entienden, comienzan a establecer relaciones más precisas. Por otra parte, el grupo emisor suele ubicar los elementos sin tener en cuenta si les va a resultar sencillo o no dictarles las indicaciones a sus compañeros. Progresivamente, irán descubriendo la conveniencia de armar un modelo organizado para dictar.

“Nos dijeron que pusiéramos el caballo, pero no dijeron que estaba al lado de la casa”. Este es un ejemplo de las observaciones que realizan los alumnos en el marco de las interacciones que la situación permite y el docente promueve, las que los lleva a comparar las maquetas.

El grupo emisor descubre entonces que, para que su dictado sea efi-

caz, hay que dar otro tipo de informaciones: los puntos de referencia. Son las críticas que le plantea el grupo receptor acerca del dictado las que van a favorecer un reajuste cuando vuelvan a enfrentarse con la situación.

Algunas de estas cuestiones podrán ser retomadas por el docente en un análisis colectivo posterior: "Miren lo que pasó acá. Les habían dicho que la oveja iba a la izquierda del cerco y la pusieron de este lado, en lugar de este. Ellos estaban acá, y les dijeron... y ellos, acá pusieron la oveja, así... ¿Qué les parece? ¿Por qué les habrá quedado diferente?".

Estos avances en los conocimientos no son automáticos, desde luego. Es un proceso que va a llevar su tiempo, donde lo fundamental es cómo pueden interpretar esa información que la situación les devuelve respecto de sus decisiones y el análisis que de ello puedan realizar conducidos por el docente.

Es decir, la validación es posible, el alumno tiene la posibilidad de juzgar si el conocimiento que puso en juego como medio para resolver (anticipación) fue el adecuado o no al comparar las maquetas y descubrir si quedaron iguales o no.

Las argumentaciones que puedan empezar a intentar los alumnos en los análisis colectivos respecto de por qué no es adecuada una determinada instrucción, por qué es insuficiente, por qué hay que volver a utilizarla favorecerán los avances progresivos en los conocimientos.

Como en toda situación didáctica, debe poder diferenciarse entre cuáles son los objetivos que persigue el docente al plantear esta situación y cuál es la finalidad para el alumno que se enfrenta a ella.

La finalidad para el alumno es lograr que el otro grupo pueda reproducir la maqueta y, para ello, tratará de emitir un buen mensaje para que el otro grupo lo entienda y pueda así construir una granja igual. De ningún modo es consciente del objetivo del maestro, esto es, la enseñanza de las relaciones espaciales, tales como ubicaciones, puntos de referencia, vocabulario, etcétera.

Tener claro cuál es la finalidad para el alumno le permite al maestro, fundamentalmente, pensar acerca de sus posibles intervenciones. Por ejemplo, frente a preguntas como "¿Está bien, señor?", el docente podría centrarse en sus objetivos y, desde allí, explicar al grupo que deben dar

algún punto de referencia para que los otros puedan entenderlos; “sugerir” que indiquen a los receptores del mensaje que el caballo está a la derecha de la casa, etcétera. Si así lo hiciera, el problema perdería su riqueza, ya que los alumnos verían coartada su acción y se limitarían a seguir las indicaciones que aporta el maestro. Por otra parte, no sería la situación misma la que les demostraría a los alumnos que es necesario dar más datos para que los compañeros puedan reproducir la maqueta y, por lo tanto, no habría validación ya que el conocimiento puesto en juego no sería el de ellos, sino el del maestro.

En cambio, si la respuesta del maestro ante la misma pregunta estuviera destinada a reinstalar el problema para permitir que los alumnos puedan avanzar en sus competencias, la contestación podría ser como la del siguiente ejemplo: “¿Les parece que así se puede entender?, si les parece, adelante”. O a posteriori: “¿Se entendió?, ¿qué podrían hacer para que se entienda la próxima vez que jueguen?”. O: “¿Qué le tendrían que haber dictado para que el otro grupo pusiera el caballo como ustedes querían?”.

Es decir, no se trata de dar información que reemplace la actividad del alumno, sino de guiar la discusión con la finalidad de que sea en la interacción con la situación donde los alumnos aprendan. El segundo grupo va a apropiarse de ciertas formas de expresión del primero y descartará otras al verificar que no son adecuadas. Paulatinamente, va a producirse la elaboración de una codificación en común, que se verá enriquecida y perfeccionada en la medida en que los alumnos dispongan de varias oportunidades de enfrentarse a esta situación o a otras similares.

Los niños construirán, de a poco, las nociones requeridas; y el docente podrá hacer institucionalizaciones⁶ de esos conocimientos, con lo cual habrá avanzado en la dirección de sus objetivos.

Estos objetivos consisten en que los niños aprendan a organizar el espacio, y esto implica que tienen que descubrir que es necesario establecer relaciones entre los objetos, y que hay que encontrar pun-

⁶ Identificaciones de los conocimientos que se utilizaron y que se busca señalar. Por ejemplo: “Aprendimos que, cuando decimos ‘a la izquierda’ o ‘a la derecha’, hay que aclarar a la izquierda o a la derecha de qué o de quién y mirándolo desde dónde para que se entienda bien cuál es”, etcétera.

tos de referencia propios, externos, o de la hoja, para poder dictarlos. Organizar el espacio requiere de todo eso.

Al tener que hacer un dictado de las localizaciones espaciales de objetos, hay un espacio de aprendizaje y un tiempo para ir aprendiendo, para ir elaborando ideas, conceptos, vocabulario, actuando y verificando si se entendió el mensaje. Se puede modificar, reajustar, seguir discutiendo...

En cuanto a las producciones de los niños, podemos describir tres tipos diferentes:

- A veces, sobre todo inicialmente, los niños consideran que un mensaje eficiente consiste en describir los objetos. Por ejemplo: "Pongan una casa, pongan un caballo, hay dos vacas, un corral...". Es decir, no comunican ninguna relación entre los objetos y, por lo tanto, la granja no resulta igual. El hecho de que los alumnos no logren, desde un principio, la reproducción de la maqueta, ¿es un indicador de que la situación no es para ellos porque no pueden resolverla con eficiencia? Todo lo contrario, justamente, planteamos esa situación porque asumimos que no van a disponer, desde un comienzo, de los conocimientos necesarios para solucionarla. ¿Cómo podrían aprender esos conocimientos si no se enfrentan a problemas para los cuales estos sean herramientas de resolución? Por otra parte, si pudieran resolver ese problema desde un principio sin ninguna dificultad, esto significaría que los conocimientos necesarios ya habían sido aprendidos con anterioridad. Es decir, aquel no era un *problema* para ellos.
- Después de jugar algunas veces, advierten que es necesario dar información acerca de las relaciones entre los objetos. Comienzan a establecer relaciones parciales. Por ejemplo: "El árbol está al lado de la casa"; "La vaca está dentro del corral". Son relaciones parciales, en tanto no consideran las relaciones entre el árbol, la casa y el corral. No logran aún controlar la ubicación de todos los elementos entre sí. Son

como pequeñas “islas” que flotan en el vacío pero, sin duda, hay un avance con respecto a las producciones anteriores.

- Finalmente, logran establecer relaciones entre todos los objetos, para lo cual utilizan puntos de referencia. “Anclan” uno de los objetos con respecto a la hoja (por ejemplo, el corral puesto en el centro) y, a partir de ahí, dictan los demás.

Buscamos que los niños progresen en la consideración y en la precisión de las relaciones espaciales entre los objetos y la necesidad de establecer los puntos de referencia. De hecho, hay errores en las reproducciones de las maquetas que son aceptados. Al no intervenir la medida, las distancias son aproximadas. Otro tipo de error generalmente aceptado por los integrantes de los grupos es la orientación de algunos elementos: que el caballo, por ejemplo, esté mirando hacia un lado o hacia otro es algo que, seguramente, no generará discusiones en un principio.

Es importante tener en cuenta la cantidad de elementos que se incluyan. Alrededor de diez objetos es lo adecuado. Si se incluyeran muchos más, los alumnos tendrían que controlar demasiadas relaciones y, por otra parte, sería mucho el tiempo que ocuparían dictando. El lector podría suponer que la tarea se facilitaría disminuyendo sensiblemente la cantidad de elementos. Ahora bien, una cantidad demasiado pequeña —por ejemplo, sólo tres— tornaría más compleja la tarea. Se requiere una cantidad mínima de elementos que permita poner en juego las relaciones entre una totalidad de objetos y, al mismo tiempo, posibilite a los niños establecer los puntos de referencia.

Otro aspecto para considerar es la variedad del material. Ubicar cuatro vacas todas iguales es más complejo que dictar diferentes objetos y ubicarlos si están interrelacionados significativamente: una granja, el comedor de una casa, una plaza, etcétera.

PENSAR LAS PRÁCTICAS

Lea la siguiente cita de *Actualización Curricular. Matemática*, de A. Castro (2000). Bs. As.: Mimeo.

Uno de los aspectos a tener en cuenta para que los alumnos dominen sus relaciones con el espacio está dado por el manejo de un lenguaje, de un vocabulario que les permita comunicar posiciones, describir e identificar objetos, indicar oralmente movimientos, etc. Se trata entonces de que la adquisición de un vocabulario geométrico se produzca a raíz de su utilidad para resolver situaciones y es en el marco de esas situaciones que se podrá hacer surgir la necesidad de expresiones cada vez menos ambiguas.

- Establezca relaciones entre la situación descrita y las que usualmente se utilizan en los primeros grados para trabajar los mismos contenidos, por ejemplo: el maestro divide la hoja en dos planos y pide a los alumnos que peguen la figurita de la casa a la izquierda y la del árbol, a la derecha.
- Registre a través de cuál cree Ud. que se favorece la aparición de las relaciones propuestas y por qué.

Resumiendo, las prácticas de enseñanza de los conocimientos espaciales tienen que estar centradas en la resolución de problemas y en la reflexión en torno a ellos.

Por ejemplo, un niño de Primer Ciclo podría trabajar con el plano de un zoológico o del barrio después de haberlo visitado y recorrido, como representación de lo realizado. Esto es lo habitual.

Ahora bien, ¿cuál sería el interés de recurrir al plano cuando ya se recorrió el lugar? Justamente, el plano adquiere sentido como una herramienta que permite anticipar los trayectos posibles, qué animales se encuentran cerca, elegir un recorrido de acuerdo con determinados intereses o criterios, tener prevista la ubicación de los sanitarios y el lugar de las comidas, de las informaciones, la entrada y la salida, etcétera. O, también, durante el recorrido, ubicados en un determinado lugar, consultar el plano para decidir hacia qué sitio continuar o para averiguar diferentes posibilidades a fin de acceder al mismo lugar.

No estamos diciendo que no sea interesante recurrir al plano también luego del recorrido para reconstruir algunos trayectos, analizar algunas cuestiones, comunicar algo, etcétera. Sólo estamos queriendo resaltar en qué situaciones un plano realmente constituye una herramienta para la ubicación y orientación en el espacio.

Estos recursos como el del plano suponen una referencia al espacio físico, pero lo hacen de diferente manera. La primera opción presenta el plano como ilustración de un recurso para una situación que ya fue plenamente resuelta. Las últimas utilizan el plano como una herramienta para resolver problemas de localización y desplazamientos en dicho espacio.

El solicitar la realización del plano después de recorrer el lugar sugiere la creencia acerca de que existe un cierto orden evolutivo por el cual, primero, se requiere un trabajo sobre una situación concreta para, luego, poder pasar a su representación gráfica y, finalmente, simbólica. También en relación con esta idea, a veces, se cree que los niños sólo tienen posibilidades de efectuar anticipaciones después de haber pasado por la "observación" o experimentación sobre una situación "concreta".

En cambio, y siguiendo con el ejemplo anterior, sostenemos que los niños pueden interpretar el plano sin haber recorrido el zoológico; y esto genera aprendizajes acerca de la localización de los objetos y de los desplazamientos necesarios para llegar a ellos.

Proponemos que la introducción de materiales y de situaciones prácticas sea utilizada por posibilitar y requerir la toma de decisiones, anticipaciones y validaciones para resolver problemas ("¿Cómo se puede llegar al kiosco desde el lugar en que estamos parados?").

Estamos pensando que la actividad matemática desplegada frente a problemas espaciales también permite la puesta en juego de quehaceres matemáticos (anticipaciones, resoluciones, validaciones). Tales procesos, en un contexto de diversos intercambios intelectuales en la clase, generarán avances en los conocimientos de los alumnos.

El estudio de las propiedades y de las relaciones entre las figuras y los cuerpos

En las primeras aproximaciones de los niños, las figuras son marcas en el papel cuya interpretación está fundamentalmente basada en la percepción, y acerca de las cuales no se plantean todavía relaciones que puedan ser generalizadas. Pensemos, por ejemplo, en la circunferencia. Los niños están en condiciones de reconocerla y diferenciarla de otras figuras mucho antes de saber que se trata del conjunto de puntos que equidistan de un centro. Por otro lado, esta última propiedad no va a ser accesible por el sólo hecho de “observar” pasivamente dibujos de circunferencias. Será necesaria cierta actividad intelectual que trascienda el nivel perceptivo para que la propiedad se torne observable.

Para que los alumnos puedan profundizar sus conocimientos geométricos, es decir, para que puedan avanzar en el análisis de las propiedades de las figuras, será necesario —como ocurre en otros ámbitos de la actividad matemática— que el conocimiento geométrico se elabore a partir de la resolución de los problemas que los niños enfrenten. En este sentido, en el momento de pensar un proyecto de enseñanza, es importante superar la idea de que los dibujos “muestran” las relaciones que los niños deben construir. Aquello que el dibujo “muestra” —o mejor dicho, aquello que un sujeto es capaz de “ver” en el dibujo— será en función de los conocimientos que se posean con relación al objeto que ese dibujo representa.

Como ya dijimos, en ciertas prácticas, el maestro asume como estrategia para que los alumnos aprendan el mostrar el objeto que concretiza el conocimiento para enseñar. En relación con el trabajo con los cuerpos, rollos de papel, dados, con las cajas de remedio, etcétera, serán los insumos a través de los cuales se intentará que los alumnos se apropien de las propiedades de cilindros, cubos, prismas. Como suele ocurrir la mayoría de las veces, los alumnos no “ven” lo que el maestro pretende, con lo cual se ve obligado a “hacerles ver”. Las definiciones son entonces las herramientas de las que se vale el maestro para que los alumnos se apropien de esos conocimientos.

Creemos que el malentendido estriba en confundir “dibujo” con “figura”. Lo primero designa al dibujo concretamente trazado sobre una hoja de papel que “se parece” a una determinada forma geométrica, a la cual intenta representar. En cambio, lo segundo designa a un objeto geométrico, un “objeto ideal” de la matemática, puramente conceptual, que no tiene existencia física. El problema didáctico es cómo hacer para que los alumnos se apropien de lo que no se “ve”: no se ve que los cuatro lados de un cuadrado son iguales; tampoco, que sus cuatro ángulos miden 90° y, mucho menos, que sus dos diagonales se cortan perpendicularmente en el punto medio y son iguales.

Es necesario que los docentes comprendan la naturaleza “ideal” de los objetos geométricos —líneas, puntos, cuerpos, figuras, etc.— que permiten modelizar algunas formas y relaciones del espacio físico real, pero no se corresponden exactamente con ninguna de ellas, como suele ocurrir con los modelos.

Una posible situación de enseñanza para establecer las relaciones entre cuerpos y figuras para plantear en Primer Ciclo es la siguiente.

Situación de pedido de figuras⁷

El maestro entrega a cada pequeño grupo de alumnos (3 ó 4 integrantes) un cuerpo geométrico. Por ejemplo, un cubo o un prisma rectangular, o una pirámide.

Sobre una mesa distante de las que trabajan los alumnos, se dispone de las figuras geométricas necesarias para cubrir cada una de las caras de los diferentes cuerpos.

El docente explica a sus alumnos que esta es una situación de “pedidos”. Cada grupo debe discutir y ponerse de acuerdo sobre el tipo y la cantidad de figuras necesarias para cubrir por completo el cuerpo que tienen. Un integrante del grupo, una vez que hayan tomado las decisiones, se acercará a la mesa en donde se encuentra la maestra para entregar el pedido por escrito, en el que no podrán incluir dibujos.

⁷ Quarantá, M. E. y B. Ressa de Moreno (2003): óp. cit.

PENSAR LAS PRÁCTICAS

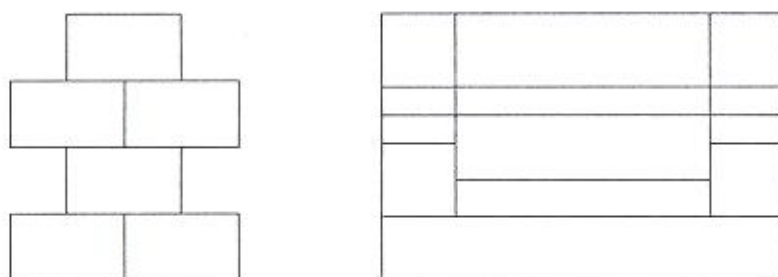
Le pedimos que analice, respecto de la situación anterior, las siguientes cuestiones:

- ¿Cree Ud. que la actividad constituye un problema? ¿Por qué?
- ¿Qué papel juega lo perceptivo?
- ¿Cuáles son los conocimientos mínimos que la situación exige utilizar?
- ¿Qué tipo de validación permite la situación?

Nos parece importante resaltar que no se trata simplemente de un trabajo de reconocimiento perceptivo. Las tareas involucradas ponen en juego conceptualizaciones, representaciones espaciales e inferencias ligadas a ellas.

Otro tipo de problemas***Representaciones gráficas bidimensionales de objetos tridimensionales***

La maestra entrega “planos” para que, con cuerpos geométricos, los niños realicen una construcción que resulte igual al modelo. Por ejemplo:



Posteriormente, serán los alumnos quienes deberán hacer una construcción, elaborar la representación bidimensional y enviarla para que otro grupo —que no ha visto la construcción— la reproduzca.

Las dificultades propias del dominio de las representaciones bidimensionales de objetos tridimensionales deberán ser objeto de análisis

y de reflexión grupal. Por ejemplo, ¿qué condiciones requiere un dibujo para que el otro grupo no confunda el cuerpo que debe utilizar, ni la posición de este último?

PENSAR LAS PRÁCTICAS

Reflexione acerca de las siguientes cuestiones:

- La mayoría de las veces, los alumnos no logran realizar sus representaciones reproduciendo las formas, los tamaños, las localizaciones de una manera exacta. Esto, ¿invalida la situación? ¿Por qué? ¿Cuál sería su sentido?
- ¿Qué permitirá a los alumnos “ajustar” sus producciones de manera tal que tanto las representaciones como las construcciones que realicen sean cada vez más cercanas a lo que se espera?
- ¿De qué modo el docente podrá intervenir para ayudar a los alumnos a anticipar si lo realizado resultará correcto?

Copia de un espacio bidimensional

También esta actividad plantea ciertas cuestiones interesantes desde la mirada de la geometría.

Por ejemplo: ampliar o reducir el tamaño de un modelo a través de un dibujo.

Con figuras geométricas, puede pedirse a los alumnos que armen una forma cualquiera. Luego, deberán reproducir en una hoja lo construido, en tamaño reducido y enviarlo a otro grupo para que, con el mismo material, lo reproduzcan.

PENSAR LAS PRÁCTICAS

- ¿Qué tipo de relaciones deben considerarse para poder resolver esta situación?
- ¿Qué diferencias implicaría la resolución de la misma situación, pero con hoja cuadrículada o con hoja lisa?

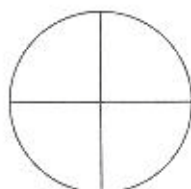
Profundizar el estudio de las figuras

En el capítulo 1 de este libro, cuando se alude a la actividad matemática, se puede leer lo siguiente: "... podemos decir que un problema es tal en la medida que invita a un desafío y a la toma de decisiones en donde los conocimientos de que se disponen no son suficientes, pero tampoco tan escasos. La situación debe estar ubicada en el centro de la balanza entre lo 'nuevo' por producir y lo 'viejo' que ya se sabe...".

Es reconocido que parte del trabajo geométrico involucra estudiar y tratar con las propiedades de las figuras. Cabe, entonces, la siguiente pregunta: ¿qué tipo de tareas, actividades, situaciones, que preserven el espíritu del trabajo que se viene proponiendo, permitirán profundizar este estudio?

PENSAR LAS PRÁCTICAS

Se le entrega a cada alumno una hoja con un dibujo como el siguiente. La tarea de los niños es copiarlo en una hoja en blanco, usando los instrumentos de geometría que consideren necesarios.



- ¿Qué conocimientos deberían tener los alumnos para resolver este problema?
- ¿Qué supone que harán alumnos de 4.º año/grado de Educación Primaria para resolver la tarea propuesta?
- ¿Qué errores supone que cometerán?
- ¿Cómo se podrá dar cuenta de si la copia coincide o no con el original?
- ¿Con qué contenidos geométricos se podría relacionar esta situación?

Esta actividad invita a analizar un tipo de tarea que, en función de los conocimientos de los alumnos y de los contenidos que se pretenda abordar, puede resultar fértil para el estudio de las propiedades de las figuras geométricas. Se trata de actividades de copiado de figuras⁸, en las cuales los alumnos deberán tener en cuenta sus elementos, sus medidas, identificar ciertas características, preservar ciertas relaciones y propiedades, así como seleccionar los instrumentos más apropiados.

Cuando un alumno tiene que copiar un dibujo, en primer lugar, debe “interrogarlo”. Es decir, identificar aquellas características que lo determinan y seleccionar las que permiten hacer la copia, descartando otras que no son relevantes para la tarea. Por ejemplo, muchos alumnos intentan hacer la copia en un lugar de la hoja que resulte coincidente con el lugar de la hoja donde se encuentra el dibujo original. Es decir, consideran una propiedad de la figura el lugar que ocupa en una hoja. Y sabemos que esta cuestión no determina al objeto geométrico ni a sus propiedades.

Ahora bien, si se trata de estudiar las propiedades de las figuras, en este tipo de tarea...

... no es necesario explicitar las propiedades mientras se realiza la actividad. Para lograr dicha explicitación de propiedades, será imprescindible generar luego un trabajo colectivo de comunicación de procedimientos de copiado. Los alumnos podrán compartir con sus compañeros sus producciones, compararlas. El docente puede seleccionar dos o tres alumnos que deberán relatar lo realizado, o bien, reproducirlo en el pizarrón. El docente puede guiar la comparación de recursos utilizados por medio de preguntas al resto de los alumnos. Por ejemplo: ¿por dónde empezaron? ¿Alguien empezó el copiado por otro lado? ¿Todos usaron compás? ¿Alguien usó la escuadra?, etcétera⁹.

De todas maneras, las actividades de copiado de figuras exigen al docente tomar ciertas decisiones didácticas que favorecerán el avance de los alumnos en relación con la conceptualización de las figuras:

⁸ Ver Documento N.º 5 en P. Sadovsky y otros (1998): óp. cit.

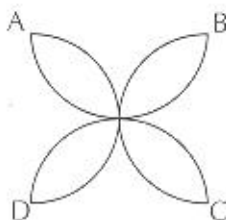
⁹ Ver Documento N.º 3 (2001). *Orientaciones didácticas para la enseñanza de la geometría en EGB*. Bs. As.: Dirección de Educación General Básica. Gabinete Pedagógico Curricular – Matemática.

- La clase de figuras para copiar dependerá del contenido que se esté abordando en la clase.
- El tipo de hoja presentada y que utilizará el alumno (por ejemplo, en un copiado de un rectángulo, si la hoja es cuadrículada, no será necesario enfrentarse al uso de la escuadra para hacer ángulos rectos o para comparar longitudes; en cambio, el mismo copiado en hoja lisa sí lo exigirá).
- Los materiales que pueden usar los alumnos (por ejemplo, se puede poner como condición no usar escuadra para que los alumnos tengan que hacer de otros modos el ángulo recto, o no permitir el uso de regla graduada para que tengan que transportar la medida con el compás, etc.)¹⁰.

A continuación, y para seguir analizando este tipo de problemas, le proponemos pensar en la siguiente actividad, que ha sido elaborada para docentes:

PENSAR LAS PRÁCTICAS

En una hoja lisa, intente copiar el siguiente dibujo, explicitando todas las características que ha considerado, las medidas que ha tomado y los instrumentos que ha utilizado. Luego superponga el original y la copia, y verifique si coinciden o no.



Una particularidad que puede adquirir este tipo de trabajo es que, en algunos dibujos, hay relaciones que permanecen “ocultas” al ojo, como ya se ha mencionado en páginas anteriores, pero que igual forman parte de la figura. En este caso, aunque no se lo “vea”, los puntos ABCD forman un cuadrado. Y desde esta característica, conviene interpretar y comenzar a copiar la figura, aunque luego haga falta

¹⁰ Ídem.

borrarla. Por otro lado, cada semicircunferencia tiene centro en el punto medio de cada lado del cuadrado, cuestión que tampoco es evidente. Es decir, muchas de las relaciones que determinan un dibujo serán necesariamente explicitadas en la medida en que haya que copiarlo. No alcanza con “mirarlo” para que sus propiedades puedan ser reconocidas y utilizadas.

Una cuestión para destacar en este tipo de trabajo tiene que ver con el modo de validar la tarea. Es decir, los alumnos, sin necesidad del docente, pueden dar cuenta del resultado de la reproducción por superposición. Si coinciden el original y la copia, el copiado será correcto; de lo contrario, deberá analizarse con los niños los aspectos que no han sido considerados y que propiciaron algún error. Este análisis permitirá a los alumnos interpretar nuevas relaciones que no han tenido en cuenta y que forman parte de las características que determinan el dibujo en cuestión.

Otro aspecto para destacar es el tipo de hoja en el que se propone la tarea. Si se trata, por ejemplo, de copiar el siguiente dibujo:

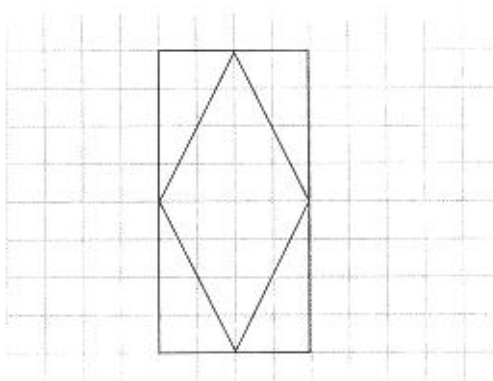


no es lo mismo si el dibujo se presenta en un papel cuadriculado, y los alumnos deben copiarlo en un papel del mismo tipo. En los primeros años de la escolaridad, el apoyo en este tipo de papel permite a los alumnos enfrentarse sólo con algunas variables: el tamaño de cada lado, la diagonal, pero este papel deja fuera otras características: los ángulos rectos que son “resueltos” por la hoja cuadriculada. En cambio, si los niños ya tienen un cierto recorrido, es posible ofrecerles el dibujo en hoja cuadriculada y que la tarea sea copiarlo en hoja lisa. En estas nuevas condiciones, el uso de la escuadra será pertinente así como la discusión acerca de los ángulos rectos. Una vez más sostenemos que, en función de la edad de los niños, sus conocimientos y los conceptos que se pretenda abordar, el dibujo, el tipo de papel y los instrumentos de geometría que se utilicen serán las variables que comanden la tarea, variables que el docente deberá determinar.

PENSAR LAS PRÁCTICAS

Se plantea a alumnos de 4.º año/grado la siguiente actividad:

Primera parte: Se entrega a cada alumno una hoja cuadriculada con el siguiente dibujo:



La consigna es la siguiente: deben copiar este dibujo en otra hoja cuadriculada, de manera tal que, al superponerlos, coincidan el original y la copia.

Segunda parte: Se les propone a los alumnos copiar ahora el dibujo, pero en una hoja lisa, de modo tal que, al superponer el original y la copia, coincidan.

- ¿Qué conocimientos deben tener disponibles los alumnos para enfrentar esta tarea?
- ¿Qué cree que los alumnos considerarán del dibujo para la primera copia? ¿Y para la segunda?
- ¿Qué errores cree que cometerán?
- ¿Qué propiedades se podrán identificar como producto del trabajo?
- ¿Qué instrumentos de geometría habilita esta actividad?
- ¿Cómo gestionaría una discusión colectiva con los niños sobre el trabajo realizado, de modo de poner en evidencia aciertos y errores, lograr avances y conceptualizaciones?

Aunque se haya mencionado antes, creemos que vale la pena insistir en la idea de que los alumnos, como parte del trabajo que se propicie, puedan involucrarse en un tipo de cultura particular que puede generarse desde la Matemática, y lógicamente, desde la geometría. Dicho trabajo presenta, entre otras, las siguientes características:

- Los objetos de la geometría (puntos, figuras, cuerpos, etc.) no pertenecen a un espacio físico real, sino a un espacio teórico, conceptualizado.
- Los dibujos trazados son representantes de esos objetos teóricos. Es decir, la marca que deja un lápiz cuando traza un triángulo no hace más que representarlo. Y es bien conocido que los alumnos asignan a estos dibujos numerosas propiedades o características que no tienen categoría de tales para la geometría, como la posición en la hoja. Incluso, los dibujos son "leídos" por los alumnos de una cierta manera que no siempre es aceptada por la geometría.
- Muchos problemas geométricos pueden ser, en un comienzo, explorados empíricamente, analizando diferentes dibujos que resultan sumamente útiles (como se verá más adelante) o recurriendo a mediciones. Estas experiencias permiten la obtención de resultados, la formulación de propiedades que, a esta altura del trabajo, adquirirán estatus de conjeturas y deberán encontrarse argumentos que den cuenta de la validez de lo que se afirma.
- En el trabajo geométrico, los enunciados, las relaciones y las propiedades son generales; y se establece un dominio de validez, es decir, se explicitan las condiciones a partir de las cuales una colección de objetos (los triángulos rectángulos, por ejemplo) cumplen una cierta propiedad o relación. Adquieren un cierto nivel de convencionalidad en la formulación apelando a un vocabulario mínimo necesario para poder socializarlas¹¹.

Intentando avanzar en la línea que se viene abordando, le proponemos realizar la siguiente actividad:

¹¹ Itzcovich, H. (2005): *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría. De las construcciones a las demostraciones*. Bs. As.: Libros del Zorzal.

PENSAR LAS PRÁCTICAS

- a. Construir un paralelogramo en el cual un lado mida 6 cm y otro lado mida, 4 cm. ¿Habrá un solo paralelogramo que cumpla estas condiciones?
- b. ¿Cuántos paralelogramos será posible construir que tengan uno de sus lados de 7 cm, que otro lado mida 4 cm y la diagonal mida 11 cm?
- c. ¿Cuántos paralelogramos será posible construir que tengan uno de sus lados de 6 cm y que los ángulos adyacentes a dicho lado midan 30° y 150° ?
- d. ¿Cuántos paralelogramos será posible construir que tengan uno de sus lados de 7 cm y que los ángulos adyacentes midan 40° y 120° ?
- e. Construir un paralelogramo en el cual un lado mida 8 cm, otro lado mida 4 cm y la altura correspondiente al lado de 8 cm sea de 3 cm. ¿La construcción es la única posible?
- f. Construir un paralelogramo en el cual un lado mida 7 cm; otro lado, 3 cm; y la altura correspondiente al lado de 7 cm sea de 4 cm. La construcción, ¿es la única posible?

La intención de la actividad recientemente propuesta es analizar diversos problemas que involucran construcciones geométricas. Una primera cuestión que asumimos es que "... bajo ciertas condiciones, el trabajo alrededor de las construcciones de figuras puede favorecer la puesta en juego —explícita o implícita— de algunas de las relaciones que las caracterizan. Las diferentes maneras de gestionar las construcciones en la clase supondrán para los alumnos distintas formas de desplegar el conocimiento geométrico..."¹².

Para profundizar esta cuestión, le proponemos la siguiente actividad:

¹² Ver Documento N°. 5 en P. Sadovsky y otros (1998): óp. cit.

PENSAR LAS PRÁCTICAS

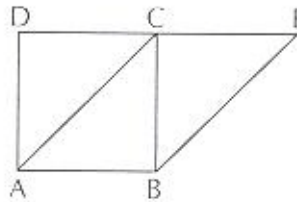
Lea las páginas 30 a 35 del Documento N.º 5 *La enseñanza de la geometría en el segundo ciclo*. (1998) Bs. As. GCBA. Secretaría de Educación. Dirección de Currícula. Luego, responda a las siguientes cuestiones.

- ¿Cuál es el rol que podrían jugar los instrumentos geométricos?
- ¿Cuál es el sentido de proponer a los alumnos si se puede construir con ciertos datos, o si la construcción es única, o si hay muchas construcciones posibles?
- ¿Cómo se podría dar cuenta de la validez o no de lo construido?

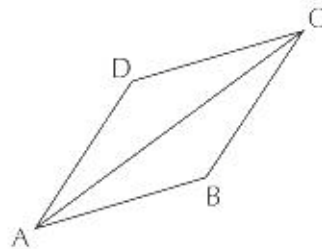
Por último, lo invitamos a resolver los siguientes problemas, que tienen por finalidad involucrar, de manera más explícita, la idea del trabajo argumentativo, propio de la actividad geométrica:

PENSAR LAS PRÁCTICAS

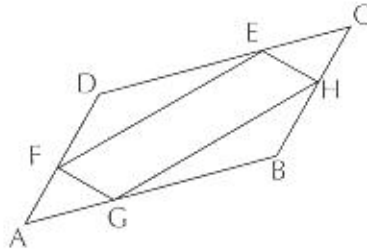
- a. El siguiente dibujo está conformado por el cuadrado ABCD y el triángulo isósceles BCE, que tiene en C un ángulo recto. ¿Será cierto que el cuadrilátero ABEC es un paralelogramo?



- b. Determine el valor del ángulo D, sin medirlo, sabiendo que ABCD es un rombo y que el ángulo BCA mide 20° :



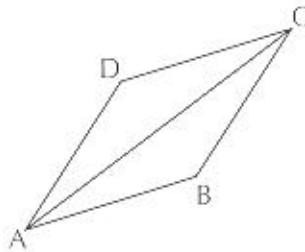
- c. En el siguiente dibujo, ABCD es un paralelogramo. $CE = AG$ y $DF = BH$.
¿Será cierto que EFGH también es un paralelogramo?



Para el análisis, consideremos el problema b. de la actividad anterior. Se trata de determinar el valor de un ángulo sin medirlo. Y esto es una parte importante de la actividad geométrica: poder conocer el valor de un área, de un ángulo; poder comparar superficies, sin necesidad de apelar al recurso de la medida. Por lo tanto, deberá recurrirse a las propiedades de las figuras con las que se trate de manera tal de poder dar cuenta de un resultado, en función de las relaciones que puedan establecerse entre los componentes de las figuras, sus propiedades y los datos que se conocen.

¿Por qué la insistencia en no medir? Si se mide, es claro que el valor del ángulo se establece sin ningún otro recurso que el del transportador. Y podría ocurrir que dos alumnos obtuvieran medidas diferentes. No porque midan mal, sino por el error que conlleva el acto de medir: el instrumento, el ojo, las líneas que quizá se deban trazar para alcanzar la medida, etcétera. Junto a esto, no se apela a propiedad alguna, con lo cual el resultado que se obtiene puede ser ese o cualquier otro. No hay manera de controlar que el resultado sea correcto.

En cambio, si se impide medir, se fuerza al establecimiento de relaciones:



Como \widehat{BCA} mide 20° , es seguro que \widehat{CAB} también mide 20° , pues en el rombo, $\overline{AB} = \overline{BC}$ y entonces $\triangle ABC$ es un triángulo isósceles. Debe tener dos ángulos iguales. Luego, el ángulo B debe medir 140° , pues la suma de los ángulos interiores del triángulo ABC es 180° . Finalmente, \widehat{D} también debe medir 140° pues, en todo rombo, los ángulos opuestos son iguales. Y este es un modo —es claro que hay otros— de encontrar el valor del ángulo D con la certeza que brindan las propiedades puestas en juego.

Para concluir este capítulo, queremos mencionar que este trabajo implica, por parte del docente, una fuerte apuesta a la elaboración, identificación y validación de propiedades de las figuras por parte de los alumnos, así como el uso de dichas propiedades para producir nuevas relaciones y obtener soluciones a nuevos problemas, poniendo el acento, no sólo en los resultados a los que se arriben, sino en el modo de dar cuenta de la validez de dichos resultados. De esto se trata el trabajo geométrico, así como todo el trabajo matemático.