## POLINOMIOS

Alguna vez en la escuela media, en clases de Física, hemos visto expresiones tales como
st = v t + s0 que representa la relación posición (s) de un móvil, que se desplaza en movimiento rectilíneo uniforme, en función del tiempo (t). O del movimiento uniformemente variado, donde la expresión utilizada es st = s0 + v0 t + 1/2 a t2.

En Economía, suele utilizarse expresiones como C = 600x2 + 320x +150 que representa, por ejemplo, el costo total de construir un depósito de materiales.

Es necesario, entonces estudiar las expresiones de la forma:

 (1)

que llamaremos polinomios, donde los se llaman **coeficientes** y son números reales o complejos (nosotros sólo trabajaremos con reales); **x** es la **variable** o **indeterminada** y los exponentes de la variable x son todos enteros no negativos.

# **Actividad**

Indicar cuáles de estas expresiones son polinomios reales (con coeficientes reales)

 a) b) c)

 d) e) f)

 g) −10 h) i)

Al conjunto de todos los polinomios en la variable con coeficientes reales lo simbolizaremos  **[x]**.

En la expresión (l) el coeficiente es el **término independiente,** y el coeficiente es el **coeficiente principal**, si  0.

# Si  0, y =0 para todo diremos que es el **grado** de P(x) y escribiremos .

Si = 1 el polinomio se llama **mónico**.

Por ejemplo, en el grado es 3; es de grado 1; es de grado 7 y es de grado 0.

El polinomio **nulo** es aquél donde todos los coeficientes son 0. No está definido el grado del polinomio nulo.

Según el número de términos con coeficientes no nulos, el polinomio se llama monomio, binomio, trinomio, ... .

En el ejemplo precedente, es un monomio, es binomio, y son trinomios.

**Actividad:**

Ejemplificar: a) binomio de tercer grado b) monomio de quinto grado

c) trinomio de cuarto grado d) monomio de grado cero

Definición:

*Dados dos polinomios y decimos que son iguales si y sólo si los coeficientes de los términos de igual grado son iguales.*

# Por ejemplo Al polinomio del segundo miembro se lo llama **completo**, porque siendo de grado 5, se escriben todos los términos de grado igual o menor que 5 colocando coeficiente 0 en los términos que faltan.

**Actividad**

Determinar los valores de y para que

a) = ;

b) ;

**Operaciones con Polinomios**

Veremos las operaciones con polinomios y las propiedades que éstas verifican.

**Adición**

La suma del polinomio y el polinomio
donde , es el polinomio:

Ejemplo: ;

En la práctica puede adoptarse esta disposición en la que se encolumnan los términos de igual grado (llamados **términos semejantes**)

Para poder enunciar alguna conclusión sobre el grado del polinomio suma sugerimos resolver, con

; ;

 y

.....................................................................................

.....................................................................................

.....................................................................................

En estos ejemplos podemos observar que:

*El grado del polinomio suma es menor o igual que el grado del polinomio de mayor grado que estamos sumando.*

La suma de polinomios goza de las mismas propiedades que la suma de números.

**Actividad:**

Dados los polinomios ; y

I) Verificar que a) la suma de polinomios es conmutativa; b) la suma de polinomios es asociativa.

II) ¿Existe elemento neutro para la suma de polinomios? ¿Cuál es?

III) ¿Todo polinomio tiene un opuesto, o inverso aditivo? Recordar que para todo polinomio existe otro tal que da por resultado el polinomio nulo. Se dice que es el opuesto de y se lo representa como . Hallar, entonces, los opuestos de y

**Sustracción**

Dados los polinomios y , efectuar la sustracción (resta o diferencia) entre y equivale a sumar a el opuesto de .

Por ejemplo: Si y

Entonces:

por lo tanto:

**Actividad**

1. Dados , y

, hallar:

 a)

 b)

 c)

2) Dados T(x) y

 , resolver:

 a)

 b)

 c)

3) Hallar tal que , si e

 **Producto**

Al multiplicar dos monomios, el resultado es otro monomio.

Por ejemplo: si y , entonces

Si y , entonces

El coeficiente del producto es el producto de los coeficientes de los factores. El grado del monomio producto es la suma de los grados de los factores, si estos no son nulos. Si alguno de los factores es el polinomio nulo, el producto es el polinomio nulo.

Para calcular el producto de dos polinomios, multiplicamos cada término (monomio) de uno de ellos por cada uno de los términos (monomio) del otro.

Si y

 , entonces:

=

 Por ejemplo, si y entonces resulta

Si queremos utilizar la disposición práctica:

Para deducir el grado del polinomio producto resolvemos los siguientes ejemplos. Consideramos:

 y calculamos:

...........................................................................................

............................................................................................

..............................................................................………..

En estos ejemplos observamos que:

*El grado del polinomio producto es igual a la suma de los grados de los polinomios factores****.***

También podemos sacar conclusiones sobre el coeficiente principal del polinomio producto, que es el producto de los coeficientes principales de los polinomios factores.

¿Y el término independiente del polinomio producto? Es igual al producto de los términos independientes de los polinomios factores.

La multiplicación de polinomios verifica la ley de cierre (el producto de dos polinomios es otro polinomio).

**Actividad**

1. Dados los polinomios ,,

 a) Verificar que: i) la multiplicación de polinomios es asociativa

 ii) la multiplicación de polinomios es conmutativa

 iii) el elemento neutro de la multiplicación es

 b) Comprobar que

 c) Calcular

2) Con los polinomios hallar los resultados de:

a) ;

b) ;

c)

**División**

Si deseamos determinar los números enteros c y r que satisfacen la ecuación 9 = 4 c + r , podemos efectuar la división entera mediante el correspondiente algoritmo:

 9 4

 1 2

donde 9 es el dividendo, 4 el divisor, 2 es el cociente y 1 es el resto. Entonces, c = 2 y r = 1 son los únicos números enteros que verifican la igualdad 9 = 4 . **2** + **1,** teniendo en cuenta que 0 ≤ r < *divisor.*  Además recordamos que el divisor nunca es cero. Esto que sucede en el conjunto de los números enteros es muy similar a lo que ocurre con los polinomios.

Para hallar los polinomios y que satisfacen la ecuación podemos realizar la división entera de polinomios. El polinomio se llama polinomio cociente y el se llama polinomio resto. El divisor no puede ser el polinomio nulo y el grado del resto debe ser menor que el grado del divisor, o

Veremos el algoritmo de la división para determinar los polinomios y , mostrando además como ejemplo en cada paso la división de por

1º: Se ordenan según las potencias decrecientes de la indeterminada *x*, el dividendo y el divisor; completando además el dividendo.

En el ejemplo, ambos polinomios están ordenados, pero hay que completar el dividendo:

2º: Dividimos el primer término del dividendo por el primer término del divisor, obteniéndose así el primer término del cociente.

En el ejemplo:

3º: Multiplicamos el primer término del cociente por todo el divisor.

En el ejemplo:

4º: Se resta este producto del dividendo, obteniéndose un nuevo dividendo.

En el ejemplo:

5º: Reiteramos el procedimiento 2º, 3º y 4º hasta obtener el polinomio resto, de grado menor que el divisor.

En el ejemplo:

Y como y , quedan entonces determinados el polinomio cociente y el polinomio resto que verifican:

Planteamos otro ejemplo. Queremos efectuar siendo y .

En el ejemplo anterior, restábamos el producto de cada monomio por el divisor. En este ejemplo procederemos de otra manera, sumando el opuesto del polinomio obtenido en cada paso.

 2

 Luego:

**Actividad**

1) Dados y determinar y tales que , donde o

 a)

 b)

 c)

 d)

 e)

 f)

2) a) Hallar el polinomio (dividendo), sabiendo que el divisor es

 el cociente es y el resto

 b) Hallar el polinomio divisor si el dividendo es

 el cociente y el resto

Cuando tenemos que dividir un polinomio por un polinomio mónico (coeficiente principal igual a 1) de grado uno, conviene utilizar un algoritmo llamado Regla de Ruffini.

Este es un procedimiento que permite hallar el cociente y el resto sin efectuar la secuencia que describimos anteriormente. Recordemos que **únicamente** puede usarse la regla de Ruffini si el divisor es un polinomio de la forma

Ejemplificaremos dicho procedimiento efectuando la división entre

 y

La disposición práctica requiere que en el primer renglón se escriban los coeficientes del dividendo ordenado y completo hasta el término independiente inclusive. En el ángulo se escribe el opuesto de , que figura en el divisor (su raíz).

El coeficiente principal del dividendo (3) se copia abajo. Se lo multiplica por −2 y el resultado (−6) se escribe debajo del siguiente coeficiente del dividendo (7). Se suma 7 y −6 y el resultado (1) se escribe abajo.

 3 7 6 -1

 -2 -6

 3 1

El 1 obtenido en el paso anterior reinicia el ciclo: se lo multiplica por −2 y el resultado (−2) se escribe debajo del siguiente coeficiente del dividendo (6). Se suman −2 y 6 y el resultado (4) se escribe abajo.

 3 7 6 -1

 -2 -6 -2

 3 1 4

El 4 obtenido en el paso anterior reinicia el ciclo: se lo multiplica por −2 y el resultado (−8) se escribe debajo del último coeficiente del dividendo (−1). Se suman −1 y −8, y el resultado (−9) es el resto. Se escribe abajo.

 3 7 6 -1

 -2 -6 -2 -8

 3 1 4 -9

El resto, en este caso −9, siempre es una constante. Los valores 3, 1 y 4 son los coeficientes del polinomio cociente ordenado y completo, cuyo grado es una unidad menor que el grado del dividendo. Entonces .

Según el algoritmo de la división podemos escribir:

 3*x* 3 + 7*x* 2 + 6*x* − 1 = (*x* + 2) (3*x* 2 + *x* + 4) − 9.

**Actividad**

1) En la Actividad anterior, el inciso 1), identificar las divisiones en que se puede aplicar la regla de Ruffini y resolver mediante este método, verificando sus resultados anteriores.

2) Obtener mediante la regla de Ruffini el cociente y el resto de la división entre y

 a)

 b)

 c)

 d)

 e)

3) Para resolver las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini, hay que recordar que si se multiplican (dividen) el dividendo y el divisor por un número distinto de cero, el cociente no varía pero el resto queda multiplicado (dividido) por dicho número.

 a)

 b)

 c)

**Divisibilidad de Polinomios**

Si al realizar la división entera entre y el resto es **nulo**, decimos que es divisible por , o que divide a .

 divide a si y sólo si existe un polinomio tal que

Para averiguar si es divisible por , efectuamos la división entre y Si el resto es 0, polinomio nulo, entonces es divisible por .

Por ejemplo, si queremos ver si es divisible por podemos dividir aplicando la regla de Ruffini:

 1 -5 6

 2 2 -6

 1 -3 0

Como entonces es divisible por

Para analizar si es divisible por , usamos el algoritmo conocido ya que no puede aplicarse la regla de Ruffini.

 0

Entonces, es divisible por

Observemos que en el algoritmo, en lugar de restar el polinomio obtenido en cada paso, se sumó su opuesto, como ya hicimos antes.

**Actividad**

Averiguar si es divisible por

 a) ;

 b) ;

 c)

Además de los vistos, otros modos de averiguar la divisibilidad de un polinomio por otro de la forma (siendo un número real cualquiera).

Para ello debemos definir el valor numérico de un polinomio:

*Dado un polinomio llamamos valor numérico de para , al número que se obtiene reemplazando a la indeterminada por el número y efectuando los cálculos.*

Ejemplos:

En ,

 = 12

En ,

En ,

**Actividad**

En los polinomios , ,

, calcular:

1. b) c) d) e)

*Decimos que = a es raíz de un polinomio si y sólo si = 0.*

Por ejemplo, es raíz de porque . También es raíz de , porque

Si realizamos la división de un polinomio por donde es un número real y es también una constante:

Entonces

 (2)

Si , reemplazamos en (2) y resulta:

Enunciamos, entonces, el **Teorema del Resto**

*El resto de la división de un polinomio por otro de la forma , es igual a*

Si queremos saber si un polinomio es divisible por otro de la forma , bastará con hallar Si , entonces es divisible por

Averigüemos si es divisible por utilizando el teorema del resto:

 ⇒ es divisible por

**Actividad**

1) Analizar si es divisible por , aplicando teorema del resto.

 a) ;

 b) ;

 c) ;

2) Halla para que sea divisor de

 a) ;

 b)

**Factorización de Polinomios**

Recordemos que si está expresado como producto de otros polinomios, las raíces de éstos son las raíces de

Por ejemplo, tiene como raíces a y

Si al escribir un polinomio como producto hay más de un factor que tiene la misma raíz, a ésta se la llama raíz múltiple**.**

En es una raíz doble de Si
 es raíz triple de .

Se llama **orden de multiplicidad** de la raíz *a* del polinomio a la cantidad de veces que está el factor en la factorización de Puede entenderse también como la potencia a la que está elevado el monomio .

En, el orden de multiplicidad de la raiz es 2. En , el orden de multiplicidad de la raiz es 3.

Un polinomio puede tener raíces reales o no tenerlas. El polinomio tiene sólo una raíz real, . Según el Teorema Fundamental del Álgebra, ***un polinomio de grado n tiene exactamente n raíces****,* considerando las reales, las no reales (complejas) y su orden de multiplicidad.

Como consecuencia de este teorema, ***un polinomio de grado n tiene como máximo n raíces reales****.* Y como las raíces complejas de un polinomio de coeficientes reales siempre se presentan de a pares, un polinomio de grado impar tiene como mínimo una raíz real.

Queremos ahora descomponer un polinomio en factores. Vamos a recordar algunas técnicas.

**Factor Común**

Si en un polinomio, la indeterminada x figura en todos los términos, es conveniente sacar factor común. También puede extraerse un número que es factor en todos los coeficientes.

Ejemplos:

Siempre es posible controlar que el producto que obtuvimos es correcto aplicando la propiedad distributiva.

**Diferencia de Cuadrados**

Recordemos que una diferencia de cuadrados puede escribirse como producto

Cuando se presenta la **resta** de dos términos y cada uno de ellos es una potencia cuadrada, puede expresarse como el producto entre la suma y la diferencia de las bases de esas potencias.

Ejemplos:

Muchas veces es posible combinar las diferentes técnicas para factorizar polinomios:

**Actividad**

Expresar cada como productos de polinomios del menor grado posible:

 a)

 b) 

 c)

**Factor común por grupos**

Algunos polinomios presentan una estructura que permite formar grupos de igual cantidad de términos y sacar factor común en cada uno de esos grupos. Una vez hecho esto, aparece un nuevo factor común. Veamos en un ejemplo:

En los dos términos que se obtienen, es factor común. Entonces el polinomio queda factorizado:

Otros ejemplos:

a)

b)

Pero aún podemos descomponer ambas diferencias de cuadrados:

*Es importante recordar que la potenciación NO es distributiva respecto de la suma ni de la resta.*

**Trinomio Cuadrado Perfecto**

Recordemos que el resultado de elevar un binomio al cuadrado es un trinomio:

donde un término es ; otro es y en otro aparece el doble del producto entre y .

A este trinomio se lo llama ***trinomio cuadrado perfecto****,* porque proviene del cuadrado de un binomio.

Analicemos los siguientes ejemplos:

a)

 entonces

b)

 entonces o

c)

 (10) 2

 entonces

 **Cuatrinomio Cubo Perfecto**

Ya hemos visto que (★)

Entonces al polinomio lo comparamos con (★)

Y resulta

**Actividad**

Factorear los siguientes polinomios:

 a)

 b)

 c)

 d)

**Actividad**

Factorizar los siguientes polinomios, utilizando cualquiera de las técnicas descriptas, e indicar cuáles son sus raíces:

a)

b)

c)

d)

e)

f)

**Ejercicios de Polinomios**

1) Hallar el valor de *a* para sea un polinomio de grado 4:

2) Efectuar las siguientes operaciones:

 a)

 b)

 c)

3) Calcular:

 a)

 b)

 c)

 d)

4) Hallar el dividendo de una división entera sabiendo que el resto es

 , el cociente y el divisor es

5) Hallar el valor de *a* para que se cumpla la siguiente igualdad:

 donde es el resto de dividir por

6) Para cada par de polinomios, indique si es divisible por

 a)

 b)

 c)

 d)

 e)

7) Al dividir por , se obtuvo 10 como resto. Hallar el término independiente de

8) El polinomio es divisible por Hallar los valores de *a* para que eso sea posible.

9) Encontrar el valor de sabiendo que −4 es raíz de

10) Encontrar el valor de sabiendo que −1 es raíz de

11) Factorizar:

 a)

 b)

 c)