CAPITULO 2

Derivada de una función

Licda. Elsie Hernández Saborío

Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática

· · ·
Revista digital Matemática, educación e internet (www.cidse.itcr.ac.cr)

Créditos

Primera edición impresa:	Rosario Álvarez, 1984.
Edición LaTeX:	Marieth Villalobos, Alejandra Araya, Jessica Chacón, Marianela Abarca, Lisseth Angulo y Walter Mora.
Edición y composición final:	Evelyn Agüero.
Gráficos:	Walter Mora, Marieth Villalobos, Evelyn Agüero.
Comentarios y correcciones:	escribir a wmora2@yahoo.com.mx

Contents

2.1 Derivada de una función

2.1.1 Introducción

El problema de la tangente

"Muchos de los problemas importantes del análisis matemático pueden transferirse o hacerse depender de un problema básico que ha sido de interés para los matemáticos desde los griegos (alrededor de $300 - 200 a.de J.C$). Es éste el problema de trazar una recta tangente a una curva dada en un punto específico a ella.

Este problema fue resuelto por métodos especiales en un gran número de ejemplos aislados aún en la temprana historia de las matemáticas. Por ejemplo, es bastante fácil resolver el problema si la curva es un círculo, y todo estudiante ha visto esta solución en su geometría de secundaria. Sin embargo, no fue si no hasta el tiempo de Isacc Newton $(1642 - 1727)$ y de Gottfried Wilhelm Leibniz $(1646 - 1716)$ que se dio un método general sistemático para obtener la solución. En este sentido se acredita a estos dos hombres la invención del cálculo.

Aunque el problema de la tangente pueda parecer de poco interés a los no matemáticos, el hecho es que las ténicas desarrolladas para resolver el problema son la mera columna vertebral de gran parte de la ciencia y la tecnología actuales. Por ejemplo, la dirección del movimiento de un objeto a lo largo de una curva en cada instante se define en términos de la dirección de la recta tangente a la trayectoria de movimiento. Las órbitas de los planetas al rededor del sol y las de los satélites artificiales alrededor de la Tierra, se estudian esencialmente comenzando con la información sobre la recta tangente a la trayectoria del movimiento. Un tipo diferente de problemas es el de estudiar la descomposición de una sustancia radioactiva tal como el radio cuando se conoce que la razón de descomposición en cada instante es proporcional a la cantidad de radio presente. La clave de este problema así como la del problema del movimiento, está en un análisis de lo que queremos designar con la palabra razón.

Como pronto veremos, este concepto está tan íntimamente relacionado con la pendiente de la recta tangente a una curva, que la formulación matemática abstracta de un problema sobre razones es indistinguible de la formulación del problema de la tangente.

Empezamos con el problema de la tangente no solo por su importancia histórica y práctica, sino también porque la intuición geométrica del lector contribuirá a hacer concreta la que, de otro modo, sería una noción abstracta"(Britton, 1968, 323).

Definición 1

Recibe el nombre de recta secante cualquier recta que pase por dos puntos diferentes de una curva.

En la siguiente figura se ha representado gráficamente una recta L secante a una curva:

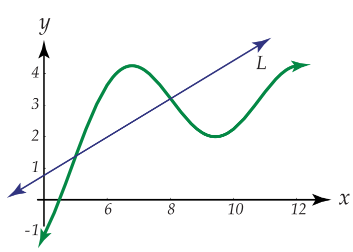


Figura 2.1: Recta secante a una curva

Como al conocer la pendiente de una recta y un punto de ella, la recta queda completamente determinada, se tiene que el problema de trazar una recta tangente a una curva dada, por un punto de ésta, se reduce a encontrar la pendiente de la recta.

Consideremos la representación gráfica de una curva con ecuación $y = f(x)$, donde f es una función continua.

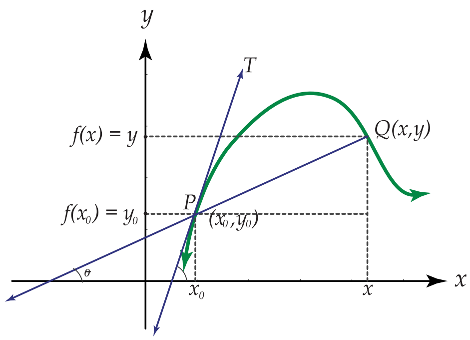


Figura 2.2: Gráfica de $f(x)$

Se desea trazar la recta tangente en un punto $P(x_o, y_o)$ dado de la curva.

Sea PQ la recta secante que pasa por los puntos $P(x_o, y_o)$ y $Q(x, y)$ de la curva.

La pendiente de esta secante, denotada m_S está dada por: $m_s = \dfrac{y - y_o}{x - x_o} = \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$

Como la pendiente de una recta es igual a la tangente del ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje X, y como θ es ese ángulo para la recta secante, entonces:

$$m_S = \tan\theta = \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_0}$$

Supongamos que existe una recta tangente a la curva en $P(x_o, y_o)$. Sea PT dicha recta.

Mantenemos ahora el punto P fijo y hacemos que el punto Q se aproxime a P, a lo largo de la curva. Cuando esto sucede, la inclinación θ de la recta secante se aproxima a la inclinación de α de la recta tangente, lo que puede escribirse como $\lim\limits_{Q \to P} \theta = \alpha$.

En igual forma, la pendiente de la secante tiende a la pendiente de la tangente, es decir, $\lim\limits_{Q \to P} \tan\theta = \tan\alpha$.

Además, cuando Q tiende hacia P, la abscisa x tiende hacia x_o por lo que $\lim\limits_{Q \to P} \tan\theta = \tan\alpha$ puede escribirse como $\lim\limits_{x \to x_o} \tan\theta = \tan\alpha$.

Luego $\lim\limits_{x \to x_o} \tan\theta = \lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_o} = \tan\alpha$.

Si denotamos por $m_t(x_o)$ la pendiente de la recta tangente a la curva en $P(x_o, y_o)$, entonces $m_t(x_o) = \lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_o}$.

■ **Definición 2**

La pendiente de la recta tangente a la curva con ecuación $y = f(x)$ en el punto (x_o, y_o), denotada $m_t(x_o)$ es igual al $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$, siempre que este límite exista.

Ejemplo 1

Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva con ecuación $f(x) = x^2 - 3x$, en el punto $(1, -2)$.

La ecuación de la recta tangente es: $y = mx + b$. Utilizando la definición anterior vamos a averiguar la pendiente en $(1, -2)$.

Solución

Así:

$$m_T(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x - (-2)}{x - 1}$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x - 1}$$
$$= \lim_{x \to 1} (x - 2) = -1$$

Luego $m_T(1) = -1$, por lo que $y = -x + b$. Para averiguar b, sustituimos el punto $(1, -2)$ como sigue: $-2 = -(1) + b$ de donde $b = -1$.

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es $y = -x - 1$.

La representación gráfica de la curva y de la recta tangente es el siguiente:

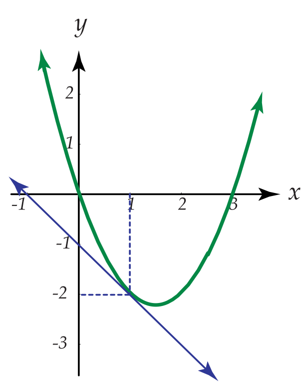


Figura 2.3: Recta tangente a $f(x) = x^2 - 3x$, en el punto $(1, -2)$

Definición 3

Se dice que la recta normal a una curva en el punto $P(x_o, y_o)$, es la línea que pasa por P y es perpendicular a la recta tangente en ese punto. Además, recuerde que dos líneas no verticales son perpendiculares entre sí, si y solo si sus pendientes tienen valores recíprocos negativos.

Si m_T es la pendiente de la recta tangente y m_N la de la recta normal, entonces:

$$m_N = \frac{-1}{m_T} \qquad (m_T . m_N = -1)$$

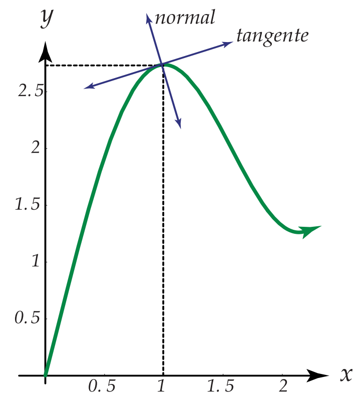


Figura 2.4: Recta normal y tangente

Ejemplo 2

Determinar la ecuación de la recta normal a la curva con ecuación $f(x) = \frac{4}{x}$ $, x > 0$, en el punto $(2, 2)$.

Solución

Como $m_N = \frac{-1}{m_T}$, averiguamos primero la pendiente de la recta tangente. Así:

$$\begin{aligned}
m_T(2) &= \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{\frac{4}{x} - \frac{4}{2}}{x - 2} \\
&= \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{\frac{8-4x}{2x}}{x - 2} \\
&= \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{4 - 2x}{x(x - 2)} \\
&= \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{4 - 2x}{x(x - 2)} \\
&= \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{-2(x - 2)}{x(x - 2)} \\
&= \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{-2}{x} = -1
\end{aligned}$$

Como $m_T(2) = -1$, entonces $m_N(2) = 1$.

La ecuación de la recta normal es: $y = 1x + b$. Sustituyendo en la ecuación anterior $x = 2$, $y = 2$ se obtiene $b = 0$.
Por tanto, la ecuación de la recta normal es $y = x$.

La representación gráfica de la curva y la recta normal es la siguiente:

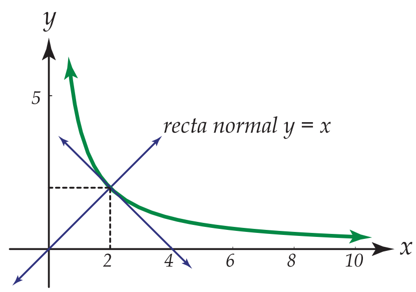


Figura 2.5: Recta normal a $f(x) = \dfrac{4}{x}$ en (2,2)

La ecuación de la recta tangente es $y = -x + 4$.

Ejercicios

1. Determinar la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la curva con ecuación $f(x) = 2x^2 - 5$, en el punto $(1, -3)$.

Ejemplo 3

1. Determinar la ecuaciónde la recta tangente a la parábola con ecuación $y = x^2$, y que es paralela a la recta con ecuación $y = 4x$.

   Solución

   Recuerde que si dos rectas son paralelas entonces sus pendientes son iguales.

   Note que en este caso no nos indican el punto de tangencia en la curva.

   Como la recta tangente es paralela a la recta de ecuación $y = 4x$, entonces $m_T(x_o) = 4$.

   Calculemos $m_T(x_o)$:

   $$m_T(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

   $$= \lim_{x \to x_o} \frac{x^2 - x_o^2}{x - x_o}$$

   $$= \lim_{x \to x_o} \frac{(x - x_o)(x + x_o)}{x - x_o}$$

$= \lim_{x \to x_o} (x + x_o)$

$= x_o + x_o = 2x_o$

Como $m_T(x_o) = 2x_o$ se tiene que $2x_o = 4$ y por tanto $x_o = 2$.

Si $x_o = 2$ entonces $y_o = 2^2 = 4$. El punto de tangencia es $P(2, 4)$.

La ecuación de la recta tangente es: $y = 4x + b$.

Sustituimos $(2, 4)$ y se obtiene que $b = -4$.

Entonces la ecuación de la recta tangente es $y = 4x - 4$.

La representación gráfica es la siguiente:

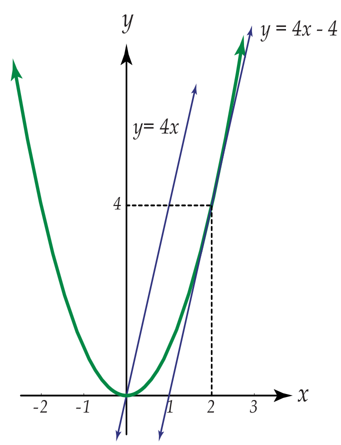


Figura 2.6: Recta tangente a $y = x^2$ paralela a $y = 4x$

Estudiaremos ahora un segundo problema que involucra un límite similar al utilizado al determinar pendiente de una recta tangente a una curva.

Dicho problema es el de determinar la velocidad de una partícula en un instante de tiempo t_o.

Recibe el nombre de movimiento rectilíneo el efectuado por una partícula a lo largo de una línea recta.

Sea s la función con ecuación $s(t) = t^2 + 1$, que describe la distancia dirigida de la partícula a un punto fijo O, en cualquier tiempo t, (s se mide en metros y t en segundos).

Cuando $t = 0$, la partícula se encuentra a 1 metro de O y cuando $t = 3$ segundos la partícula está a 10 metros de O, como se representa a continuación:

La velocidad promedio de la partícula es la razón del cambio en la distancia dirigida desde un punto fijo, al cambio en el tiempo.

En este caso, en el lapso de tres segundos, la velocidad media, denotada v_{med}, está dada por $v_{med} = \frac{10-1}{3-0} = 3$ metros por segundo.

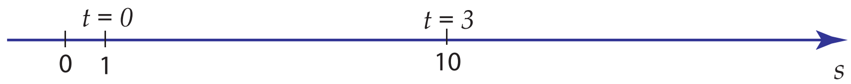


Figura 2.7: Movimiento rectilíneo de una partícula

Note que la velocidad promedio de la partícula no es constante, y que además ésta no proporciona información específica referente al movimiento de la partícula en cualquier instante determinado.

Para el movimiento anterior, la velocidad media desde $t = 3$ segundos hasta otro tiempo t cualquiera, está dada por:

$$v_{med} = \frac{s(t) - s(3)}{t - 3} = \frac{s(t) - 10}{t - 3}$$

Si quisiéramos determinar la velocidad al final de 3 segundos, es decir la velocidad instantánea cuando $t = 3$ no podríamos averiguarla con la fórmula anterior, pues si se sustituye $t = 3$ el denominador se hace cero.

Sin embargo, cuanto más corto sea el intervalo de t a $t = 3$ seg, la velocidad promedio estará más cerca de lo que intuitivamente se consideraría como la velocidad instantánea en $t = 3$seg.

Surge así la siguiente definición sobre la velocidad instantánea:

Definición 4

Si una partícula se mueve sobre una línea recta de tal forma que su distancia dirigida s, a un punto fijo de la recta está dada en función del tiempo por la ecuación $s = s(t)$, entonces la velocidad en cualquier instante t_1 es:

$$v(t_1) = \lim_{t \to t_1} \frac{s(t) - s(t_1)}{t - t_1}, \quad \text{siempre que este límite exista}$$

Utilizando la definición anterior, se puede averiguar la velocidad en el instante $t = 3$ seg, de la siguiente forma:

$$v(3) = \lim_{t \to 3} \frac{s(t) - s(3)}{t - 3}$$
$$= \lim_{t \to 3} \frac{t^2 + 1 - 10}{t - 3}$$
$$= \lim_{t \to 3} \frac{t^2 - 9}{t - 3}$$
$$= \lim_{t \to 3} \frac{(t - 3)(t + 3)}{t - 3}$$
$$= \lim_{t \to 3} (t + 3) = 6$$

Luego, la velocidad cuando $t = 3$ seg es de 6 metros por segundo.

La velocidad instantánea puede ser positiva o negativa, según la partícula se mueva a lo largo de la recta en dirección positiva o negativa; es cero cuando la partícula está en reposo.

La rapidez de la partícula en un instante de tiempo t, se define como $|v(t_1)|$, siendo simplemente la magnitud de la velocidad, es decir, su valor absoluto, por lo que será siempre positiva o nula.

La aceleración es una medida de la variación de la velocidad. La aceleración es cero si una partícula se mueve sobre una recta con velocidad constante.

Si la velocidad v de la partícula está dada por la ecuación $v = v(t)$, donde t es el tiempo, entonces la aceleración en el instante $t = t_1$, se define como el límite de la aceleración media de la siguiente forma:

$$a(t_1) = \lim_{t \to t_1} \frac{v(t) - v(t_1)}{t - t_1}$$

Observe la semejanza con la definición de velocidad instantánea como límite de la velocidad media.

Ejemplo 4

1. La ecuación $s(t) = t^2 + 2t$ describe el movimiento de una partícula sobre una recta. La distancia al origen está en metros y t está en segundos. Calcular la velocidad cuando $t = 3$ seg.

   Solución

   Se debe determinar la velocidad instantánea cuando $t = 3$ seg

   $$v(3) = \lim_{t \to 3} \frac{s(t) - s(3)}{t - 3}$$

   $$= \lim_{t \to 3} \frac{t^2 + 2t - 15}{t - 3}$$

   $$= \lim_{t \to 3} \frac{(t-3)(t+5)}{t - 3}$$

   $$= \lim_{t \to 3} (t + 5) = 8 \quad \text{metros por segundo.}$$

   Así, cuando $t = 3$ seg, la velocidad de la partícula es de 8 metros por segundo.

2. Una partícula P se mueve en línea recta de acuerdo con la ecuación $s(t) = 15t - 3t^2$, donde s, en metros, es la distancia al punto de partida en el tiempo t, (en segundos). Determinar la distancia de P al punto de partida cuando la velocidad es nula.

   Solución

   Debemos averiguar primero la velocidad de la partícula en cualquier instante t_o.

   $$v(t_o) = \lim_{t \to t_o} \frac{s(t) - s(t_o)}{t - t_o}$$

   $$= \lim_{t \to t_o} \frac{15t - 3t^2 - (15t_o - 3t_o^2)}{t - t_o}$$

   $$= \lim_{t \to t_o} \frac{15t - 15t_o - 3t^2 + 3t_o^2}{t - t_o}$$

$$= \lim_{t \to t_o} \frac{15(t-t_o) - 3(t^2 - t_o^2)}{t - t_o}$$

$$= \lim_{t \to t_o} \frac{15(t-t_o) - 3(t-t_o)(t+t_o)}{t - t_o}$$

$$= \lim_{t \to t_o} \frac{(t-t_o)(15 - 3t - 3t_o)}{t - t_o}$$

$$= \lim_{t \to t_o} (15 - 3t - 3t_o) = 15 - 6t_o$$

$= 15 - 6t_o$ metros por segundo.

Ahora averiguaremos el valor de t_o para el que la velocidad se hace cero:

$v(t_o) = 0 \iff 15 - t_o = 0 \iff t_o = \frac{5}{2}$ segundos

Por último, calculemos la distancia que ha recorrido la partícula al cabo de $t_o = \dfrac{5}{2}$ segundos.

$$s\left(\frac{5}{2}\right) = 15\left(\frac{5}{2}\right) - 3\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{75}{4} = 18,75 \text{ metros.}$$

Ejercicio

Dos partículas p_1 y p_2 parten de un mismo punto en una recta y se mueven a lo largo de ella según las ecuaciones $s_1(t) = t^2 - 4t$, y, $s_2(t) = 3t - t^2$, donde s_1 y s_2 están en metros, y t en segundos.

a. ¿En qué tiempos tendrán las dos partículas la misma velocidad?

b. Determine las velocidades de las partículas en los tiempos en que están en la misma posición sobre la recta.

2.1.2 La derivada de una función

En la resolución de los dos problemas anteriores: el de trazar una recta tangente a una curva dada y el de determinar la velocidad instantánea de una cierta partícula, se obtuvo como resultado dos límites:

$$m_T(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o},\ v(t_o) = \lim_{t \to t_o} \frac{f(t) - f(t_o)}{t - t_o}$$

Ambos límites tienen básicamente la misma forma y son casos específicos de un tipo especial de límite que se define a continuación.

Definición 1

Sea f una función real definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Sea $x_o \in I$

La derivada de f en el punto x_o, denotada $f'(x_o)$, es el $\displaystyle\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$ si este límite existe.

Note que, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la curva con ecuación $y = f(x)$ en el punto $(x_o, f(x_o))$, es precisamente la derivada de f evaluada en x_o.

También, si una partícula se mueve a lo largo de una línea recta de acuerdo con la ecuación de movimiento $s = f(t)$, puede observarse que $v(t_1)$ en la definición de velocidad instantánea de la partícula en t_1, es la derivada de f respecto a t, evaluada en t_1.

Si en la definición de derivada se sustituye $x - x_o$ por h, entonces $h \to 0$ cuando $x \to x_o$ y $x = x_o + h$.

Luego $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}$, si este límite existe. La función f es derivable en x_o si $f'(x_o)$ existe.
Si $f'(x)$ existe para cada x en un intervalo I, $(I \subset \mathbb{R})$, se dice que la función f es derivable en I; se escribe $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$.

Ejemplo 1

Utilizando la definición de derivada de una función, determinar la derivada de cada una de las funciones cuyas ecuaciones son:

1. $f(x) = 5x - 3$

   Se debe calcular el $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$

   La expresión $f(x + h)$ indica que la función f debe evaluarse en $(x + h)$. Así, $f(x + h) = 5(x + h) - 3$.

   Luego:

   $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

   $$= \lim_{h \to 0} \frac{5(x + h) - 3 - (5x - 3)}{h}$$

   $$= \lim_{h \to 0} \frac{5x + 5h - 3 - 5x + 3}{h}$$

   $$= \lim_{h \to 0} \frac{5h}{h}$$

   $$f'(x) = \lim_{h \to 0} 5 = 5$$

   Por tanto, si $f(x) = 5x - 3$ entonces $f'(x) = 5$.

2. $f(x) = \dfrac{3}{x^2}$, $x \neq 0$

   En este caso $f(x + h) = \dfrac{3}{(x + h)^2}$

   Luego:

   $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{3}{(x+h)^2} - \frac{3}{x^2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2 - 3(x+h)^2}{hx^2(x+h)^2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2 - 3x^2 - 6xh - 3h^2}{hx^2(x+h)^2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-3h(2x+h)}{hx^2(x+h)^2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-3(2x+h)}{x^2(x+h)^2}$$

$$= \frac{-6x}{x^2 \cdot x^2} = \frac{-6}{x^3}$$

Si $f(x) = \dfrac{3}{x^2}$ entonces $f'(x) = -\dfrac{6}{x^3}$.

3. $g(u) = (2u+1)^2$

   En este caso $g(u+h) = [2(u+h)+1]^2$

   Luego:

$$g'(u) = \lim_{h\to 0} \frac{g(u+h) - g(u)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[2(u+h)+1]^2 - (2u+1)^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[2(u+h)+1+(2u+1)][2(u+h)+1-(2u+1)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(2u+2h+1+2u+1)(2u+2h+1-2u-1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(4u+2h+2)(2h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 2(4u+2h+2)$$

$$g'(u) = 2(4u+0+2) = 8u+4$$

   Si $g(u) = (2u+1)^2$ entonces $g'(u) = 8u+4$.

Ejercicios

Determine, utilizando la definición de derivada, la derivada de cada una de las funciones cuyas ecuaciones son:

1. $f(t) = \sqrt{t+1},\ t > -1$

2. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4$

3. $g(y) = \dfrac{3y}{y+2}$, $y \neq -2$

2.1.3 Notaciones para la derivada de una función

Si f es una función derivable en un intervalo I, $(I \subset \mathbb{R})$, el proceso por medio del cual se obtiene $f'(x)$, da origen a una nueva función que recibe el nombre de función derivada.

El dominio de $f'(x)$ está formado por todos los números del dominio de f para los que exista $f'(x)$.

Por ejemplo, si $f(x) = \sqrt{x}$ con $x \geq 0$ entonces $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ está definida únicamente para $x > 0$.

Si $y = f(x)$, con f una función derivable, entonces la derivada de f puede denotarse por:

a.) $D_x f(x)$ que se lee: derivada de $f(x)$ respecto a x.

b.) $D_x y$ que se lee: derivada de "y" respecto a x.

c.) y' que se lee: "y prima".

2.1.4 Continuidad y derivabilidad

En el capítulo anterior se estudiaron las condiciones para que una función fuera continua en un punto. También se determinó la continuidad en un intervalo, que puede asociarse con la representación gráfica de una curva que no tiene "brincos" o "saltos bruscos".

Vamos ahora a relacionar la continuidad con la derivabilidad de una función f en un punto x_o, por medio del siguiente teorema.

■ **Teorema 1**

Si una función f es derivable en un punto x_o, entonces f es continua en x_o.

Prueba: Al final del capítulo.

El recíproco de este teorema no es cierto. Es decir, el hecho de que una función sea continua en un punto no implica que sea derivable en él.

Antes de estudiar algunos ejemplos, necesitamos conocer las siguientes definiciones sobre derivadas laterales.

■ **Definición 1**

Si f es una función continua definida en $x = x_o$, entonces:

1. La derivada por la derecha, que se denota $f'_+(x_o)$, se define por la igualdad: $f'_+(x_o) = \lim\limits_{x \to x_o^+} \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$, siempre que el límite exista.

2. La derivada por la izquierda, denotada $f'_-(x_o)$, se define por la igualdad: $f'_-(x_o) = \lim\limits_{x \to x_o^-} \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$, siempre que el límite exista.

Como consecuencia de la definición de derivada, se tiene que $f'(x_o)$ existe si y solo si existen las derivadas laterales y ambas son iguales.

Así: $f'(x_o)$ existe $\iff$ $f'_+(x_o) = f'_-(x_o)$

Ejemplo 1

1. Consideremos la función f definida por: $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x < 1 \\ -x+3 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

   Vamos a determinar si f es continua en 1 y si $f'(1)$ existe.

   Para lo primero tenemos que:

   a. $f(1)$ existe pues $f(1) = -1 + 3 = 2$

   b. Como $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (-x+3) = 2$, y $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x+1) = 2$ entonces $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$.

   Luego f es continua en $x = 1$ pues $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

   Para lo segundo determinaremos las derivadas laterales.

   a. $f'_+(1) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{-x+3-2}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{-(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} -1 = -1.$

   b. $f'_-(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x+1-2}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x-1}{x-1} = 1.$

   Como $f'_+(1) \neq f'_-(1)$ entonces $f'(1)$ no existe.

   Luego, se ha comprobado que aunque f es continua en $x = 1$ se tiene que f no es derivable en $x = 1$.

   La representación gráfica de la función es la siguiente:

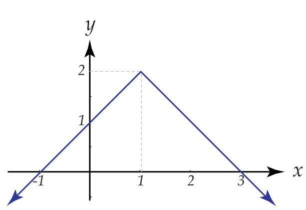


Figura 2.8: Función no derivable en $x = 1$

Note que en $x=1$ la gráfica de f tiene un "pico", siendo precisamente en $x=1$ donde no es derivable la función.

---

2. Sea f la función con ecuación: $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x>0 \\ \sqrt{-x} & \text{si} \quad x\leq 0 \end{cases}$

Determinemos si $f'(0)$ existe y si f es continua en $x=0$.

Calculemos las derivadas laterales:

a. $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2-0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0.$

b. $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{-x}-0}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{-x}}{x}.\dfrac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x\sqrt{-x}} =$
$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-1}{\sqrt{-x}} = -\infty$

Luego $f'_+(0)\neq f'_-(0)$ por lo que f no es derivable en $x=0$.

Probemos ahora si f es continua en $x=0$:

a. $f(0)$ existe pues $f(0)=0$; $f(0)=\sqrt{-0}=\sqrt{0}=0$.

b. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{-x} = 0$.

Entonces f es continua pero no es derivable en $x=0$.

La representación gráfica de la función es la siguiente:

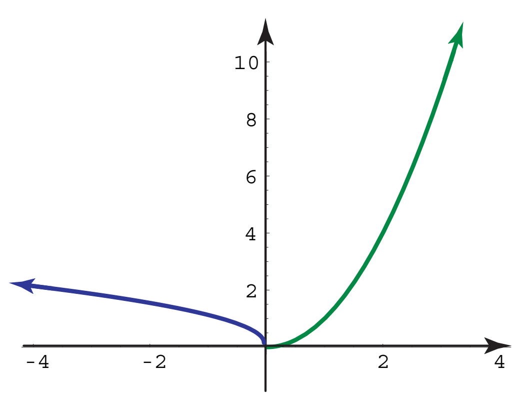


Figura 2.9: Función continua pero no derivable en $x=0$

Note que la gráfica tiene una tangente vertical en $(0,0)$.

El hecho de que f no sea derivable en cero, está relacionado con el hecho de que una recta vertical no tiene pendiente.

3. Sea f la función con ecuación: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si} \quad x < 2 \\ \sqrt{x-2} & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$

Determinemos si esta función es continua y derivable en $x = 2$. Se tiene que $f(2)$ existe pues $f(2) = \sqrt{2-2} = \sqrt{0} = 0$.

Como

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \sqrt{x-2} = 0$ y $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 - 4) = 0$

Entonces $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ existe y además $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$, por lo que f es una función continua en $x = 2$.

Estudiemos ahora las derivadas laterales:

a. $f'_+(2) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\sqrt{x-2} - 0}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\sqrt{x-2}}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{\sqrt{x-2}} = +\infty$

b. $f'_-(2) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2 - 4 - 0}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2^-} (x + 2) = 4$

Como $f'_+(2) \neq f'_-(2)$ entonces $f'(2)$ no existe.

Nuevamente, aunque una función sea continua en un punto esto no garantiza que sea derivable en él.

La representación gráfica de esta función es la siguiente:

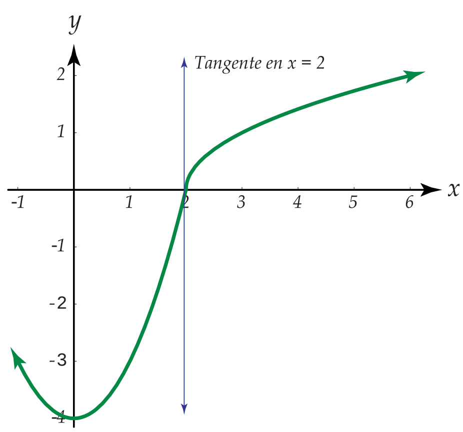


Figura 2.10: Gráfica de $f(x)$

Note que nuevamente la recta tangente a la curva en $x = 2$ es una línea vertical.

Ejercicios

Para cada una de las funciones cuyas ecuaciones son:

1. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ & \\ x - 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \quad x_o = 0$

2. $f(x) = |x - 3|, \; x_o = 3$

   a. Determine si f es continua en x_o.

   b. Halle $f'_+(x_o)$ y $f'_-(x_o)$.

   c. Determine si f es derivable en x_o.

   d. Haga la representación gráfica.

2.1.5 Teoremas sobre derivadas

Aunque dada la ecuación de una función es posible obtener su respectiva función derivada utilizando la definición, para algunas funciones este procedimiento resulta sumamente tedioso. Surge entonces la necesidad de simplificar este proceso, lo cual puede lograrse al estudiar los teoremas sobre derivadas.

■ **Teorema 1**

La derivada de una función constante es cero.

Prueba:
Ejercicio para el estudiante.

■ **Ejemplo 1**

1. Si $f(x) = 8$ entonces $f'(x) = 0$.

2. Si $f(x) = 5\sqrt{2}$ entonces $f'(x) = 0$.

3. Si $f(x) = \frac{4}{5+\sqrt{2}}$ entonces $f'(x) = 0$.

■ **Teorema 2**

Si $f(x) = x$ entonces f es derivable sobre $\mathbb{R}$ y $D_x f(x) \; = D_x x \; = 1$.

Prueba:
Ejercicio para el estudiante.

■ **Ejemplo 2**

1. $D_y y \; = 1$

2. $D_n n \; = 1$

3. $D_t t \; = 1$

Teorema 3

Si $f(x) = x^n$ con $n \in Q$ y x pertenece al conjunto A en el que x^n está bien definida, entonces f es derivable en A y $D_x x^n = n\, x^{n-1}$.

Prueba:
Al final del capítulo.

Ejemplo 3

1. Si $f(x) = x^2$ entonces $f'(x) = 2x^{2-1} = 2x^1 = 2x$.
2. Si $f(x) = x^5$ entonces $f'(x) = 5x^{5-1} = 5x^4$.
3. $D_x \left(x^{-3}\right) = -3x^{-3-1} = -3x^{-4}$.
4. $D_x \left(\frac{1}{x^5}\right) = D_x x^{-5} = -5x^{-6}$.
5. $D_x \left(\sqrt{x}\right) = D_x \left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\,\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
6. $D_x \left(x^{\frac{2}{3}}\right) = \dfrac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$
7. $D_x \left(x^{-\frac{1}{4}}\right) = \dfrac{-1}{4}x^{-\frac{1}{4}-1} = \dfrac{-1}{4}x^{-\frac{5}{4}}$
8. $D_x \left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right) = D_x \left(x^{-\frac{3}{4}}\right) = \dfrac{-3}{4}x^{-\frac{7}{4}}$

Teorema 4

Si la función f es derivable sobre un intervalo K y c es un número real, entonces la función g para la que $g(x) = c\, f(x)$ es derivable sobre K, además $D_x[c\, f(x)] = c\, D_x f(x)$.

Prueba:
Ejercicio para el estudiante utilizando la definición de derivada de una función.

Este teorema afirma que la derivada del producto de una constante por una función derivable, es igual al producto de la constante por la derivada de la función.

Ejemplo 4

1. Si $f(x) = 5x$ entonces $f'(x) = 5\, D_x x = 5 \cdot 1 = 5$.
2. Si $f(x) = -2x^3$ entonces $f'(x) = -2\, D_x x^3 = -2(3x^2) = -6x^2$.
3. $D_x \left(\dfrac{2}{7}\sqrt{x}\right) = \dfrac{2}{7}\, D_x \sqrt{x} = \dfrac{2}{7} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{7\sqrt{x}}$.
4. $D_x \left(\dfrac{-5}{4}x^{-3}\right) = \dfrac{-5}{4} \cdot -3x^{-4} = \dfrac{15}{4x^4}$.
5. $D_z \left(2z^{\frac{-3}{7}}\right) = 2\left(\dfrac{-3}{7} \cdot z^{\frac{-10}{7}}\right) = \dfrac{-6}{7} \cdot z^{\frac{-10}{7}}$.

Teorema 5

Si f y g son dos funciones derivables sobre un intervalo K, entonces la función $h = f + g$ es derivable sobre K y además $D_x[f(x) + g(x)] = D_x f(x) + D_x g(x)$, para $x \in K$.

Prueba:
Al final del capítulo.

Se tiene entonces que la derivada de una suma de dos funciones es igual a la suma de las derivadas de cada una de las funciones.
También:

$D_x[f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + ... + f_n(x)] = D_x f_1(x) + D_x f_2(x) + D_x f_3(x) + ... + D_x f_n(x)$
donde $f_1, f_2, ..., f_n$ son funciones derivables sobre un intervalo K.

Ejemplo 5

1. $D_x[x^3 + x^7] = D_x x^3 + D_x x^7 = 3x^2 + 7x^6.$
2. $D_x[2x^{\frac{7}{2}} + x^{-1}] = D_x 2x^{\frac{7}{2}} + D_x x^{-1} = 2D_x x^{\frac{7}{2}} + D_x x^{-1} = 2 \cdot \dfrac{7}{2} x^{\frac{5}{2}} - x^{-2} = 7\sqrt{x^5} - \dfrac{1}{x^2}.$
3. $D_x[\sqrt[3]{x} + 2x^3 + 5x] = D_x x^{\frac{1}{3}} + D_x 2x^3 + D_x 5x = \dfrac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}} + 2 \cdot 3x^2 + 5 \cdot 1 = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + 6x^2 + 5.$

Si f y g son funciones derivables sobre un intervalo K entonces la función $f - g$ es derivable sobre K, y además para cualquier $x \in K$ se tiene que $D_x[f(x) - g(x)] = D_x f(x) - D_x g(x)$.

Ejemplo 6

1. $D_x[5x^2 - 5] = D_x 5x^2 - D_x 5 = 10x - 0 = 10x.$
2. $D_x \left[\dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{x^2} + \sqrt{x}\right] = D_x[3x^{-1} - 2x^{-2} + x^{\frac{1}{2}}] = -3x^{-2} + 4x^{-3} + \dfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$

Teorema 6

Si f y g son funciones derivables sobre un intervalo K entonces la función $H = f \cdot g$ es derivable sobre K, y además para cualquier $x \in K$ se tiene que $D_x[f(x) \cdot g(x)] = f(x) D_x g(x) + g(x) D_x f(x)$.

Prueba:
Al final del capítulo.
Puede decirse que la derivada del producto de dos funciones, es igual al producto de la primera función por la derivada de la segunda, más el producto de la segunda función por la derivada de la primera.

Ejemplo 7

1. $D_x[\sqrt[3]{x}(2x^2+x)] = \sqrt[3]{x}D_x(2x^2+x) + (2x^2+x)D_x\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x}(4x+1) + (2x^2+x)\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

2. $D_x[(4x^3-5x^2+6)(\sqrt{x}+2x)] = (4x^3-5x^2+6)D_x(\sqrt{x}+2x) + (\sqrt{x}+2x)D_x(4x^3-5x^2+6) =$

   $(4x^3-5x^2+6)\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+2\right) + (\sqrt{x}+2x)(12x^2-10x+0)$.

3. $D_x[(ax^3-bx^2+c)(5x^{-3}+kx)]$, con a, b, c, k constantes.

   $= (ax^3-bx^2+c)D_x(5x^{-3}+kx) + (5x^{-3}+kx)D_x(ax^3-bx^2+c)$

   $= (ax^3-bx^2+c)(-15x^{-4}+k) + (5x^{-3}+kx)(3ax^2-2bx)$.

Teorema 7

Si f y g son dos funciones derivables y si $g(x) \neq 0$ sobre un intervalo K entonces la función $h = \dfrac{f}{g}$ es derivable sobre K, y además para cualquier $x \in K$ y se tiene que $D_x\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{g(x)D_xf(x) \;-\; f(x)D_xg(x)}{[g(x)]^2}$

Prueba:
Al final del capítulo.

Puede decirse que la derivada del cociente de dos funciones es igual al denominador multiplicado por la derivada del numerador, menos el numerador multiplicado por la derivada del denominador, todo dividido por el cuadrado del denominador.

Ejemplo 8

1. $D_x\left(\dfrac{5x^2-x+1}{x^3+4x^2}\right)$

   $$= \frac{(x^3+4x^2)D_x(5x^2-x+1) - (5x^2-x+1)D_x(x^3+4x^2)}{[x^3+4x^2]^2}$$

   $$= \frac{(x^3+4x^2)(10x-1+0) - (5x^2-x+1)(3x^2+8x)}{[x^3+4x^2]^2}$$

   $$= \frac{10x^4 - x^3 + 40x^3 - 4x^2 - 15x^4 - 40x^3 + 3x^3 + 8x^2 - 3x^2 - 8x}{[x^3+4x^2]^2}$$

   $$= \frac{-5x^4+2x^3+x^2-8x}{[x^3+4x^2]^2} \quad \text{con } x \neq 0,\ x \neq -4$$

2. $D_x\left(\dfrac{\sqrt{x}+5}{4x^2+2}\right)$

$$= \frac{(4x^2+2)D_x(\sqrt{x}+5)-(\sqrt{x}+5)D_x(4x^2+2)}{[4x^2+2]^2}$$

$$= \frac{(4x^2+2)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)-(\sqrt{x}+5)(8x)}{[4x^2+2]^2}$$

$$= \frac{2x^2+1-\sqrt{x}\cdot 8x(\sqrt{x}+5)}{\sqrt{x}(4x^2+2)^2}$$

$$= \frac{2x^2+1-8x(x+5\sqrt{x})}{\sqrt{x}(4x^2+2)^2}$$

$$= \frac{1-6x^2-40x\sqrt{x}}{\sqrt{x}(4x^2+2)^2} \quad \text{con } x>0$$

3. $D_x\left(\dfrac{2x}{\sqrt[3]{x}-2}\right)=\dfrac{(\sqrt[3]{x}-2)\cdot 2-2x\left(\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}\right)}{(\sqrt[3]{x}-2)^2}$

$$= \frac{2\sqrt[3]{x}-4-\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}}{(\sqrt[3]{x}-2)^2}$$

$$= \frac{6\sqrt[3]{x}-12-2\sqrt[3]{x}}{3(\sqrt[3]{x}-2)^2}$$

$$= \frac{4\sqrt[3]{x}-12}{3(\sqrt[3]{x}-2)^2} \quad \text{con } x\neq 8$$

2.1.6 Derivada de una función compuesta (Regla de la cadena)

Si consideramos las ecuaciones $y=u^3,\ u=5x^2+8$ entonces puede escribirse "y" como $y=(5x^2+8)^3$.

En igual forma, si $y=\sqrt{u},\ u=4x^2+5x+2$ entonces puede expresarse "y" como $y=\sqrt{4x^2+5x+2}$.

En general, si $y=f(u),\ u=g(x)$ entonces $y=f(g(x))$.

Las ecuaciones anteriores dan en forma explícita las siguientes funciones:

$f=\{(u,y)/\ y=f(u)\}$

$g=\{(x,u)/\ u=g(x)\}$

$h=\{(x,y)/\ y=f(g(x))\}$

La función h para la cual $h = f(g(x))$ recibe el nombre de función compuesta y se escribe $h = (fog)(x) = f(g(x))$.

Observe que los elementos del dominio de h son los x que pertenecen al dominio de la función g, tales que $g(x)$ pertenezca al dominio de f.

Ilustraremos lo anterior con el siguiente diagrama:

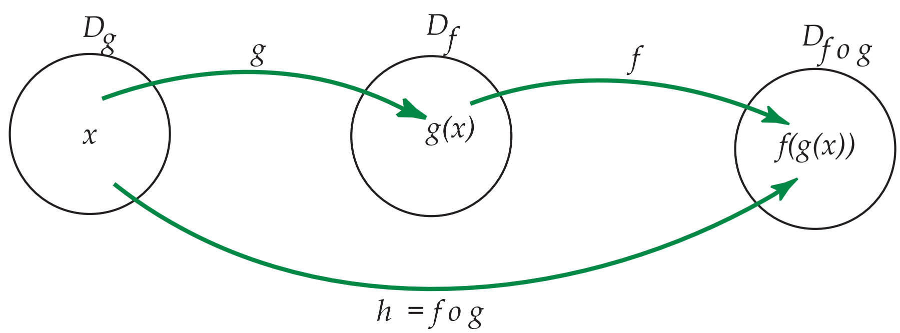


Figura 2.11: Dominio de una función compuesta

Otros ejemplos de funciones compuestas son:

1. $h(x) = \sqrt[3]{6x-4} = f(g(x))$ donde $f(x) = \sqrt[3]{x}$ y $g(x) = 6x - 4$
2. $h(x) = e^{3x^2+1} = f(g(x))$ donde $f(x) = e^x$ y $g(x) = 3x^2 + 1$

Determinaremos ahora la derivada de una función compuesta.

Teorema 1

Si la función $g = \{(x,y)/\ y = g(x)\}$ es derivable sobre un intervalo S_1 y si la función $f = \{(u,y)/\ y = f(u)\}$ es derivable sobre un intervalo S_2 tal que $S_2 = \{g(x)/\ x \in S_2\}$, entonces la función compuesta $f(g) = \{(x,y)/\ y = f(g(x))\}$ es derivable sobre S_1 y $D_x[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$, para $x \in S_1$.
Esta fórmula recibe el nombre de Regla de la Cadena.

Demostración:
Al final del capítulo.

Ejemplo 1

1. $D_x[f(3x^2+1)] = f'(3x^2+1) \cdot D_x(3x^2+1) = f'(3x^2+1) \cdot 6x$
2. $D_x[f(\sqrt{x})] = f'(\sqrt{x}) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ con $x > 0$
3. $D_x[f\left(\dfrac{2}{x}\right)] = f'\left(\dfrac{2}{x}\right) \cdot D_x\left(\dfrac{2}{x}\right) = f'\left(\dfrac{2}{x}\right) \cdot \dfrac{-2}{x^2}$

Corolario:

Si la función $g = \{(x,u)/\ u = g(x)\}$ es derivable sobre un intervalo S_1 y si $[g(x)]^p$ y $[g(x)]^{p-1}$ están definidas para $x \in S_2$ con $S_2 \subseteq S_1$, $(p \in Q)$, entonces la función $g^k = \{(x,y)/\ y = [g(x)]^p\}$ es derivable sobre S_2 y además $D_x[g(x)^p] = p(g(x))^{p-1} \cdot D_x g(x)$, para $x \in S_2$.

Este teorema es una aplicación inmediata de la regla de la cadena en la forma $D_x y = D_u y \cdot D_x u$ con $y = u^p$, $u = g(x)$ y $D_u y = p \cdot u^{p-1}$.

Ejemplo 2

1. $D_x(5x+3)^4$

   En este caso $u = 5x+3$ por lo que

   $D_x[(5x+3)^4]$

   $= 4(5x+3)^3 \cdot D_x(5x+3)$

   $= 4(5x+3)^3 \cdot 5$

   $= 20(5x+3)^3$

2. $D_x[(3x^4+5x^2+4)^{-2}]$

   $= -2(3x^4+5x^2+4)^{-3} \cdot D_x(3x^4+5x^2+4)$

   $= -2(3x^4+5x^2+4)^{-3} \cdot (12x^3+10x)$

3. $D_x\sqrt{5x^2+4}$

   $= D_x(5x^2+4)^{\frac{1}{2}}$

   $= \dfrac{1}{2} \cdot (5x^2+4)^{\frac{-1}{2}} \cdot (10x+0)$

   $= \dfrac{5x}{\sqrt{5x^2+4}}$

4. $D_x\sqrt[4]{6x^4+7x^2}$

   $= D_x(6x^4+7x^2)^{\frac{1}{4}}$

   $= \dfrac{1}{4} \cdot (6x^4+7x^2)^{\frac{-3}{4}} \cdot (24x^3+14x)$

$$= \frac{12x^3 + 7x}{2\sqrt[4]{(6x^4 + 7x^2)^3}}$$

5. $D_x\sqrt{5x + \sqrt{6x^2 + 1}}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5x + \sqrt{6x^2 + 1}}} \cdot \left(5 + \frac{12x}{2\sqrt{6x^2 + 1}}\right)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{5x + \sqrt{6x^2 + 1}}} \cdot \left(\frac{5\sqrt{6x^2 + 1} + 6x}{\sqrt{6x^2 + 1}}\right)$$

Ejercicios:

Determine la derivada de las funciones con ecuaciones:

1.) $f(x) = 6x^3 + \dfrac{2x}{\sqrt{x^3 + 1}}$ 2.) $f(x) = \sqrt[5]{\dfrac{5x^2 + 1}{2x}}$

2.1.7 Diferenciales. Interpretación geométrica

Incrementos

Estudiaremos este punto antes de definir el diferencial y dar su interpretación geométrica.

Al dar la definición de la derivada de una función f como el $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$, se utilizó h para señalar un número distinto de cero tal que $x + h$ pertenece al dominio de f .

Gráficamente se tiene la representación de f y la recta tangente:

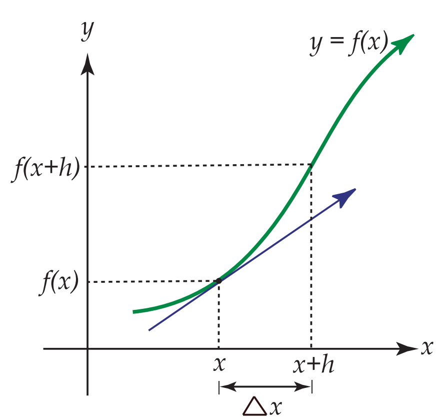


Figura 2.12: Gráfica de $f(x)$ y la recta tangente

Puede decirse que h es la diferencia entre las abscisas de dos puntos de la gráfica de f. Esta diferencia recibe el nombre de incremento de x y se denota por $\triangle x$.

Para una función f, dada al sustituir h por $\triangle x$ en la expresión $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, se obtiene $\dfrac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}$ de donde $f'(x) = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}$.

Si $y = f(x)$ entonces el incremento en "y" correspondiente al incremento $\triangle x$ de x, que se denota por $\triangle y$, está dado por $f(x+\triangle x) - f(x)$.

Así , $\triangle y$ es el cambio en "y" debido al cambio $\triangle x$ en x.

La razón $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}$ recibe el nombre de razón promedio de cambio de f o de "y", respecto a x, para el intervalo $[x, x+\triangle x]$.

La derivada: $D_x y = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}$ recibe el nombre de razón instantánea de cambio o simplemente razón de cambio de "y" o de f respecto a x.

■ Ejemplo 1

1. Si $y = 2x^2 + 1$ hallar $\triangle y$ en términos de x y $\triangle x$.

   i. Determinar $\triangle y$ para:

      a. $x = 1, \ \ \triangle x = 0.1$
      b. $x = 10, \ \ \triangle x = 0.01$

   Solución:

   $\triangle y = f(x + \triangle x - f(x))$

   $= 2(x+\triangle x)^2 + 1 - (2x^2+1)$

   $= 2(x^2 + 2x \triangle x + (\triangle x)^2) + 1 - 2x^2 - 1$

   $= 2x^2 + 4x \triangle x + 2(\triangle x)^2 - 2x^2$

   $= (4x + 2 \triangle x) \triangle x$

      a. Para $x = 1, \ \triangle x = 0.1$ se tiene que:

         $\triangle y = (4 \cdot 1 + 2 \cdot 0.1)0.1 = 0.42$

         Puede decirse que existe un incremento de 0.42 en las ordenadas debido a un incremento de 0.1 en las abscisas.

      b. Para $x = 10$ y $x = 0.01$ se tiene que:
         $\triangle y = (4 \cdot 10 + 2 \cdot 0.01)0.01 = 4.002$

ii. Hallar la razón promedio de cambio de “y” respecto a x para el intervalo $[2,\ 2.5]$ y para el intervalo $[2,\ 2.01]$.

Solución:

La razón promedio de cambio de “y” respecto a “x” está dada por:

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}$$

$$=\frac{(4x+2\triangle x)\triangle x}{\triangle x} \text{ de donde}$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=4x+2\triangle x$$

En el intervalo $[2,\ 2.5]$ se tiene $\dfrac{\triangle y}{\triangle x}=8+2(0.5)=9$ y el intervalo $[2,\ 2.01]$ se obtiene $\dfrac{\triangle y}{\triangle x}=8+2(0.01)=8.02$

iii. Hallar la razón de cambio de “y” respecto a “x”. Determinar el valor de esta razón en 2 y en 4.

Solución:

La razón de cambio de “y” respecto a “x” está dada por:

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0}(4x+2\triangle x)=4x$$

En 2 esta razón instantánea es 8 y en 4 toma el valor de 12.

2. Demostrar que la razón de cambio del volumen de una esfera con respecto a su radio, es igual al área de la superficie de la esfera.

Solución:

El volumen de una esfera de radio r es $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$

La razón de cambio del volumen con respecto al radio está dado por:

$$\lim_{\triangle r\to 0}\frac{\triangle V}{\triangle r}$$

$$=\lim_{\triangle r\to 0}\frac{V(r+\triangle r)-V(r)}{\triangle r}$$

$$=\lim_{\triangle r\to 0}\frac{\frac{4}{3}\pi(r+\triangle r)^3-\frac{4}{3}\pi r^3}{\triangle r}$$

$$=\lim_{\triangle r\to 0}\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{r^3+3r^2\triangle r+3r(\triangle r)^2+(\triangle r)^3-r^3}{\triangle r}$$

$$=\lim_{\triangle r\to 0}\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{\triangle r(3r^2+3r\triangle r+(\triangle r)^2)}{\triangle r}$$

$$=\lim_{\triangle r\to 0}\frac{4}{3}\pi\cdot[3r^2+3r\triangle r+(\triangle r)^2]$$

$= \frac{4}{3}\pi(3r^2)$

$= 4\pi r^2$ expresión que corresponde precisamente al área de la superficie de la esfera.

Diferenciales

Sea f una función definida por $y = f(x)$, derivable sobre un intervalo S.

Sea $\triangle x$ diferente de cero tal que $\triangle x + x$ pertenece al dominio de f y el punto $(x + \triangle x, f(x + \triangle x))$ esté en la gráfica de f como se muestra en la siguiente figura:

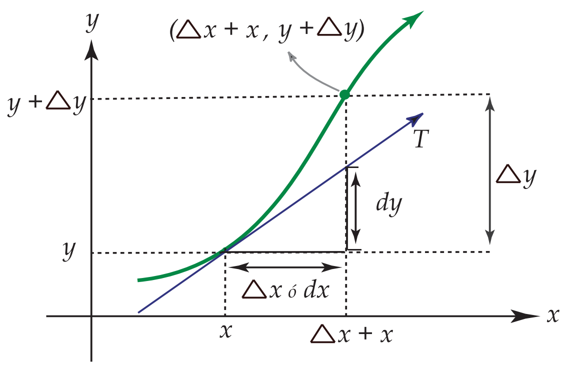


Figura 2.13: Gráfica de $f(x)$

Sabemos de la definición de derivada que:

$f'(x) = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x}$ si el límite existe

luego:

$\lim\limits_{\triangle x \to 0} \left(\dfrac{\triangle y}{\triangle x} - f'(x) \right)$

$= \lim\limits_{\triangle x \to 0} \left(\dfrac{\triangle y}{\triangle x} \right) - \lim\limits_{\triangle x \to 0} f'(x) = f'(x) - f'(x) = 0$

de donde para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\left| \dfrac{\triangle y}{\triangle x} - f'(x) \right| < \varepsilon$ siempre que $0 < |\triangle x| < \delta$ o sea, $|\triangle y - f'(x) \cdot \triangle x| < \varepsilon \triangle x$ siempre que $0 < |\triangle x| < \delta$.

Lo anterior significa que $|\triangle x - f'(x) \triangle x|$ puede hacerse tan pequeño como se quiera, tomando $|\triangle x|$ suficientemente pequeño.

Luego, $f'(x) \triangle x$ es tan buena aproximación para el incremento $|\triangle y|$ como se desee, tomando $|\triangle x|$ suficientemente pequeño.

■ **Definición 1**

Si f es una función tal que $f'(x)$ existe sobre un intervalo S y si $\triangle x$ es cualquier número distinto de cero, la diferencia de f con respecto a x es igual $f'(x)$ multiplicada por $\triangle x$. Esta diferencial se denota por $d_x f(x)$ de tal forma que $d_x f(x) = f'(x) \triangle x$.

Ejemplo 2

Si $f(x) = 4x^2 + 1$ entonces $d_x f(x) = 8x \triangle x$.

Consideremos ahora una función compuesta compuesta $h = f(g)$ donde $y = f(x)$ $x = g(t)$ siendo t la variable independiente final y "x" la variable intermedia. Luego $y = h(t)$.

Aplicando la definición anterior tanto a "y" como a "x" se obtiene: $d_t y = h'(t) \triangle t$, $d_t x = g'(t) \triangle t$.

Utilizando la regla de la cadena para derivar h respecto a t se obtiene que $h'(t) = f'(x) g'(t)$.

Luego $d_t y = h'(t) \triangle t = f'(x) g'(t) \triangle t = f'(x) d_t x$, fórmula que se escribe usualmente $dy = f'(x) dx$, y que se lee como la diferencial de "y" es igual a la derivada de "y" con respecto a "x", multiplicada por la diferencial de "x" donde dy, dx son diferenciales con respecto a la misma variable.

Definición 2

Si una función f está definida por $y = f(x)$ entonces la diferencial de x, que se denota dx, está dada por $dx = \triangle x$ donde x es la variable independiente final, y además, la diferencial "y" es siempre: $dy = f'(x) dx$.
En la figura anterior es fácil observar que dy es una mejor aproximación de $\triangle y$ conforme $\triangle x$ se hace cada vez más pequeña.

Ejemplo 3

1. Determinar $\triangle y$, dy, $\triangle y - dy$ para $y = x^2 - 3x$, $x = 2$; $\triangle x = 0.03$

   Solución:
   Consideremos $f(x) = y = x^2 - 3x$.
   Calculemos primero el incremento:

   $$\triangle y = f(x + \triangle x) - f(x) = (x + \triangle x)^2 - 3(x + \triangle x) - (x^2 - 3x)$$

   $$\Longrightarrow \triangle y = x^2 + 2x \triangle x + (\triangle x)^2 - 3x - 3 \triangle x - x^2 + 3x$$

   $$\Longrightarrow \triangle y = 2x \triangle x + (\triangle x)^2 - 3 \triangle x$$

   $$\Longrightarrow \triangle y = (2x + \triangle x - 3) \triangle x$$

   Para $x = 2$, $\triangle x = 0.03$; $\triangle y = (4 + 0.03 - 3)(0.03)$ de donde $\triangle y = 0.0309$

   Ahora calculemos la diferencial dy:

   $$dy = f'(x) dx = (2x - 3) dx$$

Luego para $x = 2,\ \triangle x = 0.03$ se tiene que $dy = (2 \cdot 2 - 3)(0.03) = 0.03$

Por último $\triangle y - dy = 0.0309 - 0.03 = 0.009.$

2. Utilizando diferenciales, calcular aproximadamente el valor de $\sqrt[3]{122}$.

   Solución:

   Tomemos $f(x) = y = \sqrt[3]{x},\ x = 125,\ dx = \triangle x = -3.$

   Nos interesa determinar una aproximación a $y + \triangle y$ para $x = 125$ y $dx = -3$.

   Para ello calculamos el diferencial de "y":

   $dy = f'(x)dx = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}dx$; sustituyendo "$x$" por 125 y dx por -3 se obtiene que:

   $$dy = \frac{-3}{3\sqrt[3]{(125)^2}} = \frac{-1}{\sqrt[3]{(125)^2}} = \frac{-1}{\sqrt[3]{5^6}} = \frac{-1}{5^2} = \frac{-1}{25} = -0.04$$

   Luego $dy = -0.04,\ y = 5 = \sqrt[3]{125}$

   Así aproximamos $y + \triangle y$ para $x = 125,\ dx = \triangle x = -3$ con $y + dy = 5 - 0.04 = 4.96$

   Luego $\sqrt[3]{122} = 4.96$

3. El lado de un cuadrado es igual a 5 cm. Hallar el incremento aproximado de su área si el lado aumenta 0.01 cm.

   Solución:

   Sea $A(x) = y = x^2$ donde x es el lado del cuadrado, A denota su área.

   Se desea determinar cuánto aumenta el área cuando la longitud del lado pasa de 5 cm a 5.01 cm.

   Calculemos la diferencial de área:
   Así:
   $dA = f'(x)dx = 2xdx,$ donde $x = 5$ y $dx = 0.01$
   Luego:
   $dA = 10(0.01) = 0.1$ y aproximamos $A + \triangle A$ para $x = 5,\ dx = 0.01$ con $A + dA = 25 + 0.10$ de donde $A + dA = 25.10,$ área del nuevo cuadrado.

   El incremento del área es de 0.1 cm^2.

4. Al calentar una esfera de radio $R = 9\ cm,$ su volumen aumentó $32.4\pi\ cm^3$. Hallar el alargamiento del radio de la esfera.

   Solución:

Sea $f(R) = y = \frac{4}{3}\pi R^3$ la ecuación para el volumen de la esfera.

En este caso conocemos la diferencial del volumen de la esfera que está dada por $dV = 32.4\pi\ cm^3$. Debemos averiguar la diferencial o el incremento del radio, es decir $dx = \triangle x (dR = \triangle R)$

Como $dV = f'(x)dR = 4\pi R^2 dR$; $dV = 32.4\pi; cm^3$ y $R = 9\ cm$ entonces:

$32.4\pi\ cm^3 = 4\pi(9\ cm)^2 dR$ y por tanto $dR = 0.1\ cm$.

El radio de la esfera se alargó 0.1 cm.

Ejercicios.

Resuelva los problemas siguientes:

1. Hallar el valor aproximado de $(99)^{-1}$.
2. Sea $u = f(x)$ y $v = g(x)$, donde f y g son funciones derivables sobre un dominio común. Exprese la diferencial del producto uv en términos de las diferenciales de u y v.
3. Un paralelepípedo rectangular de 10cm de altura tiene por base un cuadrado cuyo lado es igual a 20cm. ¿Cuánto aumentará el volumen del paralelepípedo si el lado de la base se alarga 0.02cm?
4. De cada cara de un bloque cúbico de madera se saca una capa de 0.3cm de espesor. Si el bloque tenía originalmente 7cm de arista, aproximadamente cuánto va a decrecer el volumen a causa del proceso?

Nota: A partir de la notación diferencial se tiene que $dy = f'(x)dx$ por lo que se puede dividir por dx obteniéndose por tanto que $f'(x) = \frac{dy}{dx}$.

El usar el cociente de diferenciales para denotar la derivada de f se debe a Leibniz y se utiliza a veces al denotar las derivadas de orden superior.

2.1.8 Derivadas de orden superior

Si f es una función diferenciable, es posible considerar su función derivada como:

$f' = \{(x, y) /\ y = D_x f(x)\}$ para x en el dominio M de f.

Si para algunos valores $x \in M$ existe el $\lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$ se dice que existe la segunda derivada de la función f que se denota por $f''(x)$ o $D_x^2 f(x)$, que equivale a $D_x[D_x f(x)]$. O sea, la segunda derivada de la función f se obtiene derivando la primera derivada de la función.

Ejemplo 1

1. Si $f(x) = 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1$ entonces:

   $f'(x) = 15x^2 + 12x - 5$ y

   $f''(x) = 30x + 12$

2. Si $g(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x - 1}$ entonces:

   $g'(x) = \dfrac{(x-1)(2x+3) - (x^2+3x)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$ y derivando nuevamente

   $g''(x) = \dfrac{(x-1)^2(2x-2) - (x^2-2x-3)2(x-1)}{(x-1)^4}$

   $= \dfrac{(x-1)[(x-1)(2x-2) - (x^2-2x-3)]}{(x-1)^4}$

   Por tanto $g''(x) = \dfrac{8}{(x-1)^3}$

Similarmente podemos decir que la derivada de $D_x^2 f(x)$ respecto a "x" es la tercera derivada de f respecto a "x" que se denota $D_x^3 f(x)$ o $f'''(x)$.

La derivada de la tercera derivada es la cuarta derivada $D_x^4 f(x)$ y así podríamos continuar sucesivamente hasta la enésima derivada de f que se denota por $D_x^n f(x)$ o $f^{(n)}(x)$. Generalmente se habla del orden de la derivada; así la primera derivada es la derivada de primer orden, la segunda es la de segundo orden, la enésima derivada es la derivada de orden n.

■ Ejemplo 2

1. Determinar $g''(x)$ si $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$, donde $D_g = \mathbb{R}$.

   Solución:

   Obtenemos primero $g'(x)$

   $g'(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$

   Luego:

   $g''(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+2x+3} - (x+1)\cdot \frac{(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+3}}}{\sqrt{(x^2+2x+3)^2}}$ y se tiene que:

   $g''(x) = \dfrac{2}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+3}}$

2. Determinar $f'''(x)$ si $f(x) = 2x^{\frac{1}{3}} - 4x^{\frac{2}{5}} + x$

   Solución:

Se tiene que:

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{8}{5}x^{\frac{-3}{5}} + 1$$

$$f''(x) = \frac{-4}{9}x^{\frac{-5}{3}} + \frac{24}{25}x^{\frac{-8}{5}}$$

Por último:

$$f'''(x) = \frac{20}{27}x^{\frac{-8}{3}} - \frac{192}{125}x^{\frac{-13}{5}}$$

3. Si $y = \sqrt{x}$ determinar $D_x^n y$.

   En este caso debemos dar una forma general para la derivada de orden n, partiendo de las regularidades que se presentan en las primeras derivadas que calculemos.

   Así:

$$y' = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}$$

$$y'' = \frac{-1}{4}x^{\frac{-3}{2}} = \frac{-1}{2^2}x^{\frac{-(2\cdot 2-1)}{2}}$$

$$y''' = \frac{3}{8}x^{\frac{-5}{2}} = \frac{3}{2^3}x^{\frac{-(2\cdot 3-1)}{2}}$$

$$y^{iv} = \frac{-15}{16}x^{\frac{-7}{2}} = \frac{-15}{2^4}x^{\frac{-(2\cdot 4-1)}{2}}$$

$$y^{v} = \frac{105}{32}x^{\frac{-9}{2}} = \frac{105}{2^5}x^{\frac{-(2\cdot 5-1)}{2}}$$

$$\vdots$$

$$y^{n} = \frac{(-1)^{n+1} 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^n}x^{\frac{-(2n-1)}{2}} \quad \text{para } n \geq 2.$$

Ejercicios.

1. Obtener $D_u^n w$ si $w = \dfrac{1}{1+2u}$.

Una aplicación de la segunda derivada

Anteriormente hemos estudiado que si $s = s(t)$ nos indica la distancia de una partícula al origen en un tiempo t, entonces $D_t s(t)$ es la velocidad en el tiempo t.

Al calcular la derivada de la velocidad respecto al tiempo, es decir, al calcular $D_t v(t)$ se obtiene la aceleración instantánea en el tiempo t. Si denotamos esta aceleración por $a(t)$ se tiene que $a(t) = D_t^2 s(t)$, es decir, la aceleración es la segunda derivada de la distancia respecto al tiempo.

Ejemplo 3

Sea $s = \dfrac{32}{12+t^2}$ con $t \geq 0$, la ecuación que determina la distancia en el tiempo t (en segundos) de una partícula al origen en un movimiento rectilíneo. Determinar el tiempo, la distancia, y la velocidad en cada instante en que la aceleración es nula.

Solución:

Si $s = \dfrac{32}{12+t^2}$ entonces la velocidad v está dada por:

$v(t) = \dfrac{-64t}{(12+t^2)^2} = s'(t)$ y la aceleración es $a = \dfrac{192t^2 - 768}{(12+t^2)^3} = v'(t)$

Averiguemos el tiempo en que la aceleración se hace cero:

$a(t) = 0 \iff 192t^2 - 768 = 0 \iff t^2 = 4 \iff t = 2$

Luego, la distancia recorrida cuando $t = 2$ es $s = 2$ metros y la velocidad en $t = 2$ es $v = \dfrac{-1}{2}$m/seg.

Ejemplo 4

Si $y = f(x)$ es la ecuación de una curva, se sabe que $f'(x)$ determina la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en un punto (x, y).

Se tiene que $D_x^2 y$ es la razón de cambio de la pendiente de la recta tangente respecto a x. Más adelante utilizaremos la segunda derivada de una función para determinar los extremos relativos de una función y para determinar la concavidad de la gráfica de una función.

Ejemplo 5

1. Determinar la pendiente de la recta tangente en cada punto de la gráfica de la curva con ecuación $y = x^4 + x^3 - 3x^2$, en los que la razón de cambio de la pendiente es cero.

   Solución:

   Se tiene que $y' = 4x^3 + 3x^2 - 6x$ da la pendiente de la recta tangente a la curva.

   Además $y'' = 12x^2 + 6x - 6$ determina la razón de cambio de la pendiente.

   Debemos averiguar los valores de x en los que esta razón de cambio es cero;

   Entonces $y'' = 0 \iff 6(2x-1)(x+1) = 0 \iff x = \dfrac{1}{2}$ ó $x = 1$

   Luego, cuando $x = \dfrac{1}{2}$ la pendiente es $y' = 12\left(\dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{6}{2} - 6 = 0$ y cuando $x = -1$ la pendiente y' también es cero.

2. Determinar la razón de cambio de la pendiente en $(3,27)$ para la curva con ecuación $y=(2x-3)^3$.

Solución:

La razón de cambio de la pendiente está dada por la segunda derivada de la función, así:

$D_x^2 y = D_x(D_x y) = D_x[6(2x-3)^2] = 12(2x-3)\cdot 2 = 24(2x-3)$

En el punto con coordenadas $(3,27)$ la razón de cambio de la pendiente es:
$24(2\cdot 3-3) = 24(6-3) = 72$

Luego $D_x^2 y = 72$ en $(3,27)$.

2.1.9 Derivada de la función logarítmica

Vamos a estudiar la derivada de la función f definida por $f(x)=\log_a x$, donde $x\in\mathbb{R}^+$ y $a\in\mathbb{R}^+$ tal que $0<a<1$ ó $a>1$

Teorema 1

Si $a>0$ y $a\neq 1$, y si $x>0$, entonces la función $\log_a = \{(x,y)/\ y=\log_a x,\ x\in]0,+\infty[\}$ es derivable sobre su dominio $]0,+\infty[$ y $D_x \log_a x = \dfrac{1}{x}\log_a e,\ x>0$.

Demostración:
Al final del capítulo.

Ejemplo 1

1. $D_x \log_2 x = \dfrac{1}{x}\log_2 e$
2. $D_x \log_{\frac{1}{2}} x = \dfrac{1}{x}\log_{\frac{1}{2}} e$

Teorema 2

Sea $a>0$ y $a\neq 1$, si la función $g=\{(x,u)/\ u=g(x)\}$ es derivable y $g(x)\neq 0$ sobre un conjunto M, entonces la función F definida por $F(x)=\log_a |g(x)|,\ x\in M$, es derivable sobre M y $D_x \log_a |u| = F(x) = \log_a |u| = \dfrac{1}{u}(\log_a e) D_x u,\ x\in M$.

Demostración:
Al final del capítulo.

Ejemplo 2

1. $D_x \log_3(5x^2+1) = \dfrac{1}{5x^2+1}\ \log_3 e(10x) = \dfrac{10x}{5x^2+1}\ \log_3 e$

2. $D_x \log_2 \sqrt{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \quad \log_2 e \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\log_2 e}{2x}, \quad x > 0$

3. $D_x \quad \log_5 \left(\dfrac{x+1}{x^2+3} \right)$

   $= \dfrac{1}{\frac{x+1}{x^2+3}} \quad \log_5 e \cdot \dfrac{x^2+3}{1-(x+1)(2x)} \cdot (x^2+3)^2$

   $= \dfrac{3-2x-x^2}{(x+1)(x^2+3)} \quad \log_5 e, \quad x > -1$

En particular si la base de los logaritmos es e entonces el $\log_e x$ se denota por $\ln x$, y:

1. $D_x \ln x = \dfrac{1}{x} \ \log_e e = \dfrac{1}{x} \cdot 1 = \dfrac{1}{x}$, es decir $D_x \ \ln x = \frac{1}{x}$

2. Si $g(x)$ es una función derivable con $g(x) \neq 0$ entonces:
   $D_x \ \ln |g(x)| = \dfrac{1}{g(x)} D_x(g(x))$

Ejemplo 3

1. $D_x \ln 5x = \dfrac{1}{5x} D_x(5x) = \dfrac{1}{5x} \cdot 5 = \dfrac{1}{x}$

2. $D_x \ln(\sqrt{x+1} + x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+x} D_x(\sqrt{x+1}+x)$

   $= \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+x} \cdot \left(\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} + 1 \right), \quad x > -1.$

3. $D_x \ln^2 x = D_x[\ln x]^2 = 2[\ln x] \cdot D_x \ln x = 2 \ \ln \ x \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{2 \ \ln \ x}{x}$

4. $D_x \ln^4(x^2+5) = D_x[\ln(x^2+5)]^4$

   $= 4[\ln(x^2+5)]^3 \cdot \dfrac{1}{x^2+5}(2x)$

   $= \dfrac{8x \cdot \ln^3(x^2+5)}{x^2+5} \quad x \in \mathbb{R}.$

5. $D_x[\ln(3x+1) - 4x] = \dfrac{3}{3x+1} - 4 = \dfrac{-12x-1}{3x+1}, \quad x > \dfrac{-1}{3}.$

6. $D_x \left(\dfrac{2}{\ln(x+1)} \right)$

   $= D_x \left(2[\ln(x+1)]^{-1} \right)$

   $= -2[\ln(x+1)]^{-2} \cdot \dfrac{1}{x+1}$

$$= \frac{-2}{(x+1)\ln^2(x+1)}$$

Ejercicios.

1. Si $\ln 50 = 3.912$ calcule, utilizando diferenciales, un valor aproximado a tres decimales de $\ln(50.4)$.

2.1.10 Derivada de la función exponencial

La función exponencial de base a, con $a > 0$ y $a \neq 1$, tiene como dominio $\mathbb{R}$ y como ámbito $]0, +\infty[$.

En el teorema siguiente se dará la derivada de la función exponencial.

■ **Teorema 1**

$D_x a^x = a^x \ln a$

Prueba: Al final del capítulo.

■ **Ejemplo 1**

1. $D_x 2^x = 2^x \ln 2$

2. $D_x 4^x = 4^x \ln 4$

3. $D_x \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x \ln \frac{1}{2} = \frac{-\ln 2}{2^x}$

4. $D_x \left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^x \ln \frac{3}{4}$

Observe que si la base de la función exponencial es e, entonces $D_x e^x = e^x \ln e = e^x \cdot 1$ de donde $D_x e^x = e^x$.

■ **Teorema 2**

Si $a > 0$, con $a \neq 1$, y si $g = \{(x,y)/\ y = g(x)\}$ es derivable sobre M entonces la función compuesta $f(x) = a^{g(x)}$ es derivable sobre M y $D_x a^{g(x)} = a^{g(x)} \ln a \ \ D_x g(x)$, para $x \in M$.

Prueba:
Ejercicio al estudiante.

Igual que el caso anterior, si la base de la función exponencial es e, entonces $D_x e^{g(x)} = e^{g(x)} \ln e \ \ D_x g(x)$ de donde $D_x e^{g(x)} = e^{g(x)}\ D_x g(x)$.

Ejemplo 2

1. $D_x 2^{5x} = D_x 2^{5x} \cdot D_x 5x = 2^{5x}(\ln 2) \cdot 5 = 5(2^{5x} \ln 2)$

2. $D_x 3^{(x^2+1)} = D_x 3^{(x^2+1)} \cdot D_x(x^2+x) = 3^{(x^2+1)}(\ln 3)(2x+1)$

3. $D_x 4^{\sqrt{x}} = 4^{\sqrt{x}} \ln 4 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{4^x \ln 4}{2\sqrt{x}}$

4. $D_x e^{2x} = e^{2x} D_x(2x) = 2e^{2x}$

5. $D_x e^{5x+1} = 5e^{5x+1}$

Ejercicios.

I Determine la derivada de cada una de la funciones siguientes:

1. $f(x) = x^2 \pi^{-4x}$
2. $g(x) = 3\ e^{x^2}$
3. $h(t) = \dfrac{t^3}{e^{2t}+t}$
4. $h(x) = \ln\left(\dfrac{2-5\ e^x}{2+5\ e^{3x}}\right)$
5. $f(x) = \left(x^2 + e^{-x^3}\right)\ln(1+2^{-x})$

II 1. Determine la ecuación de la recta tangente a la curva con ecuación $y = 3\ e^{-2x}$ tal que sea paralela a la recta con ecuación $x + y = 2$.

2. Determinar la ecuación de la recta tangente trazada a la curva con ecuación $y = e^{\frac{1}{2}x}$ en el punto de su interseción con el eje Y.

3. La dependencia entre la cantidad x de sustancia obtenida en cierta reacción química y el tiempo t de reacción se expresa por la ecuación $x = A(1 - e^{-kt})$. Determinar la velocidad de reacción.

2.1.11 Derivadas de la funciones trigonométricas

A continuación se presentan las derivadas de las funciones trigonométricas: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.

1. $D_x \operatorname{sen} x = \cos x$

   Prueba: Al final del capítulo.

Utilizando esta como guía, junto con el teorema sobre derivada de un cociente de funciones, se pueden realizar las respectivas demostraciones sobre las derivadas de las funciones trigonométricas.

En general, aplicando la regla de la cadena para funciones compuestas, se cumple que $D_x[seng(x)] = \cos g(x) \cdot D_x g(x)$.

Ejemplo 1

a. $D_x[\operatorname{sen} 6x] = \cos 6x \cdot D_x 6x = 6\ \cos 6x$

b. $D_x \operatorname{sen} \sqrt[3]{x} = \cos \sqrt[3]{x} \cdot D_x \sqrt[3]{x} = \dfrac{\cos \sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x^2}}$

c. $D_x[\operatorname{sen} e^{4x}] = \cos e^{4x} \cdot D_x e^{4x} = \cos e^{4x} \cdot e^{4x} \cdot 4 = 4e^{4x} \cos e^{4x}$

d. $D_x(\operatorname{sen}^4 x) = D_x[(\operatorname{sen} x)^4] = 4(\operatorname{sen} x)^3 \cdot \cos x = 4 \operatorname{sen}^3 x\ \cos x$

Ejercicios.

Determine la primera derivada de cada una de las funciones con ecuaciones:

a. $f(x) = \operatorname{sen}(5x^3 - 2x^2 + 4)$

b. $g(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{2x}{\ln\ 2}\right)$

c. $h(x) = \operatorname{sen}^2(3x)$

2. $D_x \cos x = -\operatorname{sen} x$

Prueba: Ejercicio para el estudiante.

En general, si $u = g(x)$ aplicando la regla de la cadena se tiene que $D_x[\cos u] = -\operatorname{sen} u \cdot D_u$

Ejemplo 2

a. $D_x[\cos(8x^3)] = -\operatorname{sen}(8x^3 \cdot D_x(8x^3) = -24x^2\ \operatorname{sen}(8x^3))$

b. $D_x\left(\cos\left(\dfrac{3}{e^x}\right)\right) = D_x[\cos(3\ e^{-x})] = -\operatorname{sen}(3\ e^{-x}) \cdot (3\ e^{-x} \cdot -1) = 3\ e^{-x}\ \operatorname{sen}(3\ e^{-x})$

c. $D_x(\cos^3 x) = D_x[(\cos x)^3] = 3(\cos x)^2(-\operatorname{sen} x) = -3\ \cos^2 x\ \operatorname{sen} x$

Ejercicios.

Determine $f'(x)$ si:

a. $f(x) = \cos \sqrt[5]{x^2}$

b. $f(x) = \cos\left(\dfrac{3x+1}{x}\right)$

c. $f(x) = \sqrt{\cos x}, \;\; x \in \left]n\pi, \dfrac{2n+1}{2}\pi\right[, \;\; n \in Z$

d. $f(x) = 4\ \cos 3^x$

3. $D_x \tan x = sec^2 x, \;\;$ con $\;\; x \neq (2n+1)\ \frac{\pi}{2}, \;\; n \in Z$

Prueba: Ejercicio para el estudiante.

En general, su $u = g(x)$ entonces aplicando la regla de la cadena se obtiene que $D_x \tan u = \sec^2\ u \cdot D_x u$.

Ejemplo 3

a. $D_x \tan\left(\dfrac{2}{x}\right) = \sec^2\left(\dfrac{2}{x}\right) \cdot D_x\left(\dfrac{2}{x}\right) = \sec^2\left(\dfrac{2}{x}\right) \cdot \left(\dfrac{-2}{x}\right) = \dfrac{-2}{x^2}\ \sec^2\left(\dfrac{2}{x}\right), \; x \neq 0$

b. $D_x \tan(\ln\ x) = \sec^2(\ln\ x) D_x \ln\ x = \dfrac{\sec^2(\ln\ x)}{x}, \;\; x > 0$

c. $D_x \sqrt{\tan x} = \dfrac{1}{2\sqrt{\tan x}} \cdot \sec^2 x = \dfrac{\sec^2 x}{2\sqrt{\tan x}}$

Ejercicios.

Determine $f'(x)$ si

a. $f(x) = e^{\tan x}$

b. $f(x) = \sqrt[3]{\tan 2x}$

c. $f(x) = \tan^3(2x)$

4. $D_x[\cot x] = -\csc^2 x, \;\; x \neq \dfrac{\pi}{2} n, \;\; n \in Z$

Prueba: Ejercicio para el estudiante.

Si $u = f(x)$, aplicando la derivada para la composición de funciones se obtiene que $D_x(\cot u) = -\csc^2 u\ D_x u$.

Ejemplo 4

a. $D_x(\cot 5x) = -\csc^2\ 5x \cdot 5 = -5\ \csc^2 5x$

b. $D_x(\cot^3 5x) = D_x[(\cot 5x)^3] = 3(\cot 5x)^2 \cdot -\csc^2\ 5x \cdot 5$

c. $D_x\left(\dfrac{2}{\cot x}\right) = \dfrac{-2(-\csc^2\ x)}{(\cot x)^2} = \dfrac{2\ \csc^2\ x}{(\cot x)^2}$

Ejercicios.

Determine $f'(x)$ si

a. $f(x) = \cot(5^x)$

b. $f(x) = 2\sqrt[3]{\cot x}$

c. $f(x) = \cot(5x^2 + 5 \ \ln \ x)$

5. $D_x(\sec x) = \sec x \ \tan x, \ \ x \neq (2n+1)\dfrac{\pi}{2}, \ \ n \in Z$

Prueba: Ejercicio para el estudiante.

Si $u = g(x)$, aplicando la regla de la cadena se obtiene que $D_x(\sec u) = \sec u \ \tan u \ D_x u$.

Ejemplo 5

a. $D_x[\sec(2x^2)] = \sec(2x^2) \ \tan(2x^2) D_x(2x^2) = 4x \ \sec(2x^2) \ \tan(2x^2)$

b. $D_x(e^{\sec x}) = e^{\sec x} \ \sec x \ \tan x$

c. $D_x \sec\left(\dfrac{2}{x}\right) = \sec\left(\dfrac{2}{x}\right) \ \tan\left(\dfrac{2}{x}\right) \ D_x\left(\dfrac{2}{x}\right) = \dfrac{-2}{x^2} \sec\left(\dfrac{2}{x}\right) \ \tan\left(\dfrac{2}{x}\right) \quad x \neq 0$

Ejercicios.

Determine $f'(x)$ si

a. $f(x) = \sec\left(\dfrac{2x-4}{x}\right)$

b. $f(x) = \sec\sqrt[3]{x^2+1}$

c. $f(x) = \dfrac{3x}{\sec 4x}$

6. $D_x[\csc x] = -\csc x \ \cot x, \ \ x \neq n\pi, \ \ n \in Z.$

Prueba: Ejercicio para el estudiante

Si $u = g(x)$, aplicando la regla de la cadena se obtiene que $D_x(\csc u) = -\csc u \ \cot u \ D_x u$.

Ejemplo 6

a. $D_x[\csc(2+x^2)] = -\csc(2+x^2) \ \cot(2+x^2) \ D_x(2+x^2) = -2x \ \csc(2+x^2) \ \cot(2+x^2)$

b. $D_x[\csc(2^x)] = -\csc 2^x \ \cot 2^x \ D_x 2^x = -\csc 2^x \ \cot 2^x \ \ln \ 2 = -2x \ \ln \ 2 \ \csc 2^x \ \cot 2^x$

c. $D_x \ln\,(\csc x) = \dfrac{1}{\csc x} \cdot (-\csc x \ \cot x) = -\cot x$

Ejercicios.

Determine $f'(x)$ si

a. $f(x) = e^{\csc x^2}$

b. $f(x) = \sqrt[3]{\csc x}$

c. $f(x) = \cot\left(\dfrac{x^2}{x+1}\right), \quad x \neq -1$

2.1.12 Derivadas de las funciones inversas

Previo al estudio de las funciones trigonométricas inversas, es necesario determinar la derivada de la función inversa de una función dada. Para ello consideremos el siguiente teorema.

Teorema 1

Sea f una función estrictamente creciente y continua en un intervalo $[a, b]$ y g la función inversa de f.

Si $f'(x)$ existe y es diferente de cero para $x \in]a, b[$, entonces la función derivada $g'(y)$ también existe y no es nula en el correspondiente "y" donde $y = f(x)$.

Además se tiene que $g'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$, o sea $D_y g(y) = \dfrac{1}{D_x f(x)}$.

Note que si $y = f(x)$ entonces $x = g(y)$ corresponde a $f^{-1}(y)$, y $D_y f^{-1}(y) = \dfrac{1}{D_x y}$

Demostración: Al final del capítulo

Ejemplo 1

Consideremos la función definida por:

$f\ :]0, +\infty[\longrightarrow] -3, +\infty[,\ f(x) = y = x^2 - 3$

Esta función posee función inversa definida por:

$g\ :] -3, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[,\ g(y) = \sqrt{y+3}$

Se tiene que $g'(y) = \dfrac{1}{2\sqrt{y+3}}$

Como

$y = x^2 + 3$ entonces $g'(y) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 - 3 + 3}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2}} = \dfrac{1}{2x}$

$g'(x) = \dfrac{1}{D_x(x^2 - 3)} = \dfrac{1}{f'(x)}$

Note que: $\sqrt{x^2} = |x| = x$ pues $x \in]0, +\infty[$

Ejemplo 2

Sea $y = f(x) = x^3$ la ecuación de una función definida en $\mathbb{R}$ tal que $g(y) = \sqrt[3]{y} = x$, o sea $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Se tiene que $g'(y) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$, y como $y = x^3$ entonces

$$g'(y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^3)^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^6}} = \frac{1}{3x^2} = \frac{1}{f'(x)}$$

Así: $D_y x = \dfrac{1}{D_x y}$

El teorema anterior será de gran utilidad cuando determinemos las derivadas de las funciones trigonométricas inversas.

2.1.13 Las funciones trigonométricas inversas y sus derivadas

Conviene recordar que:

a. Si una función es continua y estrictamente creciente (o decreciente) en un intervalo, entonces posee función inversa la cual también es continua y estrictamente creciente (o decreciente).

b. Las funciones trigonométricas son periódicas por lo que la correspondencia entre la variable independiente y la dependiente no es uno a uno.

   De aquí se tiene que la inversa de una función trigonométrica no es una función, es una relación.

   Sin embargo, si se restringe el dominio de una función trigonométrica se establece una relación biunívoca y la inversa de la función trigonométrica sí es una función.

Función seno inverso

Al considerar la gráfica de la función seno:

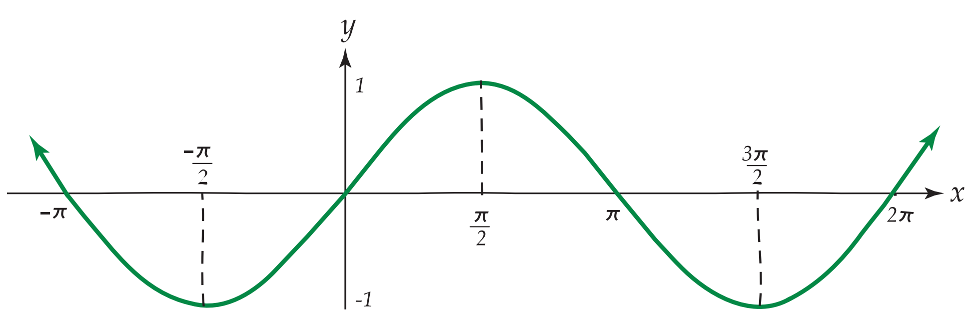


Figura 2.14: Gráfica de la función seno

Se observa que en varios intervalos, por ejemplo:

$$\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right], \left[\frac{-5\pi}{2}, \frac{-3\pi}{2}\right],$$

etc, la función seno es continua y estrictamente creciente, por lo que podría escogerse alguno de ellos para definir la función inversa de la función seno. Usualmente se toma el intervalo $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Luego, se define la función seno como:

$$F = \left\{ (x, y) \text{ tal que } y = \operatorname{sen} x, \quad \text{con } \; x \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \; y \in [-1, 1] \right\}$$

La función F así definida es continua y estrictamente creciente en el intervalo $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, por lo que existe una única función, definida en el intervalo $[-1, 1]$, llamada función seno inverso. Esta función, denotada arcsen, se define como sigue:

$$f : [-1, 1] \to \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \, f(x) = \operatorname{arcsen} x$$

Se tiene entonces que $y = \operatorname{arcsen} x \iff x = \operatorname{sen} y, \;\; y \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Luego, $\operatorname{arcsen}(r)$ con $r \in [-1, 1]$, es el único número $t \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ para el cual $\operatorname{sen} t = r$.

Ejemplo 1

a. $\operatorname{arcsen} 0 = 0$ pues $\operatorname{sen} 0 = 0$.

b. $\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$ pues $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

c. $\operatorname{arcsen}\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-\pi}{3}$ pues $\operatorname{sen}\left(\frac{-\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2}$

d. $\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ pues $\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

La representantación gráfica de la función seno y de la función arcoseno es la siguiente:

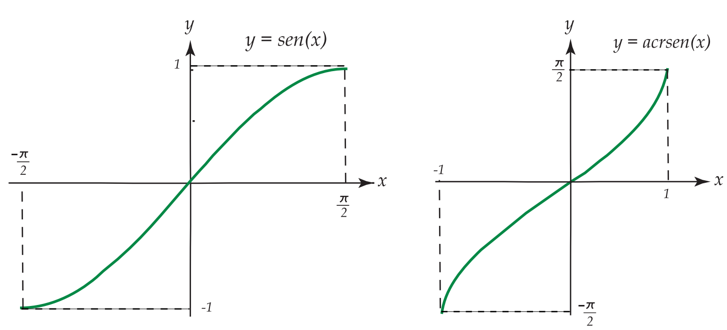


Figura 2.15: Gráfica de la función seno y arcoseno

Derivada de la función seno inverso

Como $y = \operatorname{arcsen} x \iff x = \operatorname{sen} y$, para $y \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $x \in [-1, 1]$, aplicando el teorema de la derivada de una función inversa se tiene que:

$D_x(\operatorname{arcsen} x) = \dfrac{1}{D_y \operatorname{sen} y} = \dfrac{1}{\cos y}$

Como $\cos^2\ y + \operatorname{sen}^2\ y = 1$, y $\cos y \geq 0$ para $y \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ entonces $\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\ y} = \sqrt{1 - x^2}$ pues $x = \operatorname{sen} y$.

Luego: $D_x(\operatorname{arcsen} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ para $x \in]-1, 1[$

En general $D_x(\operatorname{arcsen} f(x)) = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}}, f(x) \in]-1, 1[$.

■ **Ejemplo 2**

1. $D_x(\operatorname{arcsen} 5x^2) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - (5x^2)^2}} \cdot D_x(5x^2) = \dfrac{10x}{\sqrt{1 - 25x^4}}, \quad |x| < \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

2. $D_x(\operatorname{arcsen} \sqrt{x}) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - (\sqrt{x})^2}} \cdot D_x(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1 - x}}, \quad x \in]0, 1[$

3. $D_x(\operatorname{arcsen} x)^3 = 3(\operatorname{arcsen} x)^2 \cdot \dfrac{1}{1 - x^2} = \dfrac{3\ \operatorname{arcsen}^2 x}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in]-1, 1[$

Ejercicios.

Determine $D_x h(x)$ si:

a. $h(x) = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{2x}{x + 1}\right)$

b. $h(x) = \operatorname{arcsen}(2x^2 + 3)$

Función coseno inverso

Como en la función seno, la función coseno es continua y estrictamente creciente en varios intervalos por ejemplo: $[-2\pi, -\pi], [0, \pi], [2\pi, 3\pi]$, etc, por lo cual debe restringirse su dominio de tal forma que posea función inversa.

Sea entonces la función F tal que:

$F = \{(x, y) \text{ tal que } y = \cos x, \text{ con } x \in [0, \pi],\ y \in [-1, 1]\}$

La función F así definida es continua y estrictamente decreciente en el intervalo $[0, \pi]$, por lo que posee función inversa. Esta recibe el nombre de arco coseno, (o función coseno inverso), y se denota arccos.

Se define de la siguiente forma:

$$f : [-1, 1] \to [0, \pi],\ f(x) = \arccos x$$

Se tiene que $y = \arccos x \iff x = \cos y$ con $y \in [0, \pi]$

Luego, $\arccos(k)$ con $k \in [-1, 1]$, es el único número α con $\alpha \in [0, \pi]$ para el que $\cos \alpha = k$.

Ejemplo 3

a. $\arccos(-1) = \pi$ pues $\cos \pi = -1$

b. $\arccos\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{5\pi}{6}$ pues $\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$

c. $\arccos(0) = \dfrac{\pi}{2}$ pues $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

d. $\arccos\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ pues $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$

La representación gráfica de la función coseno y la de la función arco coseno es la siguiente:

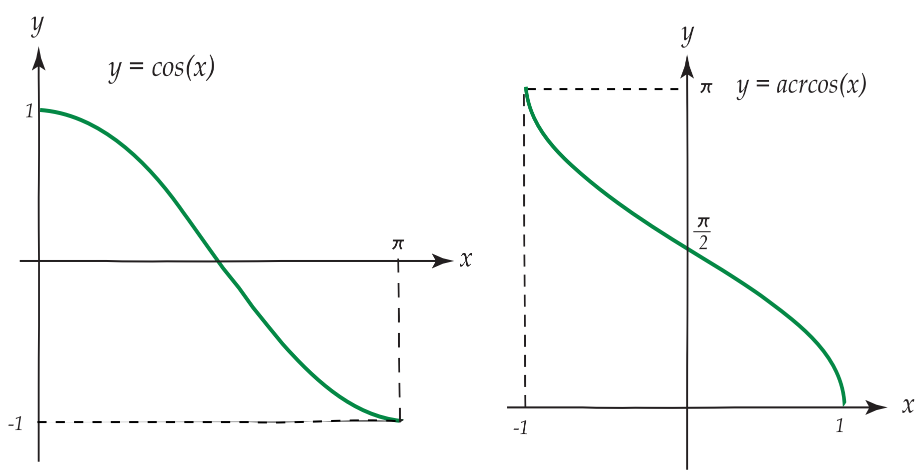


Figura 2.16: Gráfica de la función coseno y arcocoseno

Derivada de la función coseno inverso

Como $y = \arccos x \iff x = \cos y$ para $y \in [0, \pi]$, $x \in [-1, 1]$, aplicando el teorema de la derivada de la función inversa se tiene que:

$$D_x(\arccos x) = \frac{1}{D_y \cos y} = \frac{1}{-\operatorname{sen} y} = \frac{-1}{\operatorname{sen} y}$$

Como $\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y = 1$, y $\operatorname{sen} y \geq 0$ para $y \in [0, \pi]$ entonces $\operatorname{sen} y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$ pues $x = \cos y$.

Luego: $D_x(\arccos x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$ con $x \in]-1, 1[$

En general $D_x(\arccos f(x)) = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}} \cdot D_x f(x), f(x) \in]-1, 1[$.

Ejemplo 4

1. $D_x(\arccos(3x)) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-(3x)^2}} \cdot D_x(3x) = \dfrac{-3}{\sqrt{1-9x^2}}, \quad |x| < \dfrac{1}{3}$

2. $D_x\left(\arccos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} \cdot D_x\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}, \quad |x| > 1$

3. $D_x(\arccos(e^x)) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-(e^x)^2}} \cdot e^e = \dfrac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}, \quad x \in]-1, 0[$

Ejercicios.

Determine $D_x g(x)$ si:

a. $g(x) = \arccos(2x+1)$

b. $g(x) = \arccos\left(\dfrac{2x}{\arccos x}\right)$

Función tangente inversa

Igual que en los dos casos anteriores, vamos a restringir el dominio de la función tangente al intervalo $\left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, en el que es continua y estrictamente creciente, por lo que posee función inversa.

Luego se define la función tangente como:

$G = \left\{(x,y) \text{ tal que } y = \tan x, \text{ con } x \in \left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[, \ y \in \mathbb{R}\right\}$

Se define la función tangente inversa, también llamada arco tangente, y denotada arctan, como:

$$f : \mathbb{R} \to \left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[, \ f(x) = \arctan x$$

Se tiene que $y = \arctan x \iff x = \tan y$ con $y \in \left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[, \ x \in \mathbb{R}$

Luego, $\arctan(k)$ con $k \in \mathbb{R}$ es el único número α con $\alpha \in \left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ para el que $\tan\alpha = k$.

Ejemplo 5

a. $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ pues $\tan\frac{\pi}{4} = 1$

b. $\arctan 0 = 0$ pues $\tan 0 = 0$

c. $\arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-\pi}{6}$ pues $\tan(\frac{-\pi}{6}) = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$

Además:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \dfrac{\pi^-}{2}$ pues $\lim\limits_{x\to\frac{\pi^-}{2}} \tan x = +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan x = \frac{-\pi^+}{2} \quad \text{pues} \quad \lim_{x\to\frac{-\pi^+}{2}} \tan x = -\infty$$

La representación gráfica de la función tangente y la de la función arcotangente es la siguiente:

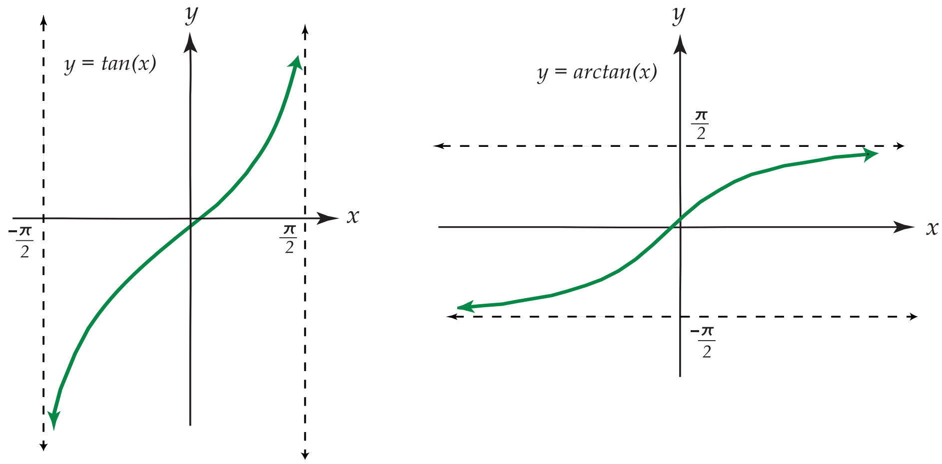


Figura 2.17: Gráfica de la función tangente y arcotangente

Derivada de la función arcotangente

Como $y = \arctan x \iff x = \tan y$ para $y \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $x \in \mathbb{R}$, aplicando el teorema de la derivada de la función inversa se tiene que:

$$D_x(arctan\ x) = \frac{1}{D_y \tan y} = \frac{1}{\sec^2\ y}$$

Como $\tan^2\ y + 1 = \sec^2 y$, y $x = \tan y$ entonces $\sec^2 y = 1 + x^2$ por lo que:

$$D_x(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

En general $D_x(\arctan f(x)) = \dfrac{1}{1+[f(x)]^2} \cdot D_x f(x)$

Ejemplo 6

1. $D_x(\arctan(5x^3)) = \dfrac{1}{1+(5x^3)^2} \cdot D_x(5x^3) = \dfrac{15x^2}{1+25x^6}, \quad x \in \mathbb{R}$

2. $D_x(\arctan(\sqrt{x})) = \dfrac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}, \quad x > 0$

3. $D_x(\arctan(\ln x)) = \dfrac{1}{1+(\ln\ x)^2} \cdot D_x(\ln\ x) = \dfrac{1}{x(1+\ln^2\ x)}, \quad x > 0$

Ejercicios.

Determine $D_x h(x)$ si:

a. $h(x) = \arctan\left(\dfrac{x}{2x+1}\right), \;\; x \neq \dfrac{-1}{2}$

b. $h(x) = \dfrac{2x}{\arctan(x+1)}, \;\; x \neq -1$

c. $h(x) = \arctan\left(\dfrac{2}{x}\right), \;\; x \neq 0$

Función cotangente inversa

Para definir la función inversa de la función cotangente, vamos a restringir el dominio de ésta al intervalo $]0, \pi[$, en el que es continua y estrictamente decreciente, por lo que posee función inversa.

Se define función cotangente como:

$H = \{(x, y) \text{ tal que } y = \cot x, \;\; \text{con} \;\; x \in]0, \pi[, \;\; y \in \mathbb{R}\}$

La función cotangente inversa, llamada también arco cotangente y denotada "arccot", se define como:

$$f : \mathbb{R} \to]0, \pi[, \;\; f(x) = \operatorname{arccot} x$$

Por la definición de la función arco cotangente se tiene que $y = \operatorname{arccot} x \iff \cot y = x \;\; \text{con} \;\; y \in]0, \pi[, \;\; x \in \mathbb{R}$

Luego, $\operatorname{arccot} k$ con $k \in \mathbb{R}$ es el único número α con $\alpha \in]0, \pi[$ para el que $\cot \alpha = k$.

Ejemplo 7

a. $\operatorname{arccot}(1) = \frac{\pi}{4}$ pues $\cot\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

b. $\operatorname{arccot}(0) = \frac{\pi}{2}$ pues $\cot\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

c. $\operatorname{arccot}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{6}$ pues $\cot\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$

Además:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arccot} x = 0^+$ pues $\lim\limits_{x \to 0^+} \cot x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arccot} x = \pi^-$ pues $\lim\limits_{x \to \pi^-} \cot x = -\infty$

La representación gráfica de la función cotangente y la de la función arcocotangente es la siguiente:

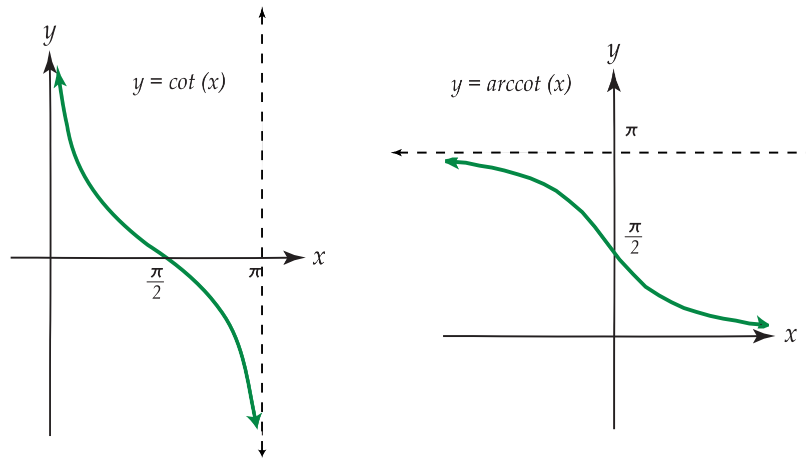


Figura 2.18: Gráfica de la función cotangente y arcocotangente

Derivada de la función cotangente inversa

Como $y = \operatorname{arccot} x \iff x = \cot y$ para $y \in]0, \pi[$, $x \in \mathbb{R}$, aplicando el teorema de la derivada de la función inversa se tiene que:

$$D_x(\operatorname{arccot} x) = \frac{1}{D_y \cot y} = \frac{1}{-\csc^2 y} = \frac{-1}{\csc^2 y}$$

Como $\cot^2 y + 1 = \csc^2 y$, y $x = \cot y$ entonces $\csc^2 y = 1 + x^2$ por lo que:

$D_x(\operatorname{arccot} x) = \dfrac{-1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$

En general $D_x(\operatorname{arccot} f(x)) = \dfrac{-1}{1+[f(x)]^2} \cdot D_x f(x)$

Ejemplo 8

1. $D_x(\operatorname{arccot}(7\sqrt{x})) = \dfrac{-1}{1+(7\sqrt{x})^2} \cdot D_x(7\sqrt{x}) = \dfrac{-7}{2\sqrt{x}(1+49x)}, \quad x > 0$

2. $D_x(\operatorname{arccot}^2 x) = 2 \operatorname{arccot} x \cdot \dfrac{-1}{1+x^2} = \dfrac{-2 \operatorname{arccot} x}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$

3. $D_x(\operatorname{arccot}(e^x)) = \dfrac{-e^x}{1+e^{2x}}, \quad x \in \mathbb{R}$

Ejercicios.

Determine $D_x h(x)$ si:

a. $h(x) = \dfrac{2x}{\operatorname{arccot} x}$

b. $h(x) = \sqrt{\operatorname{arccot} x}$

Función secante inversa

Vamos a elegir como dominio de la función secante el intervalo I de donde $I = \left[-\pi, \frac{-\pi}{2}\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ya que en I la función secante es biunívoca y la derivada de la función inversa puede expresarse por medio de una sola fórmula.

La representación gráfica de la función secante en el intervalo señalado es el siguiente:

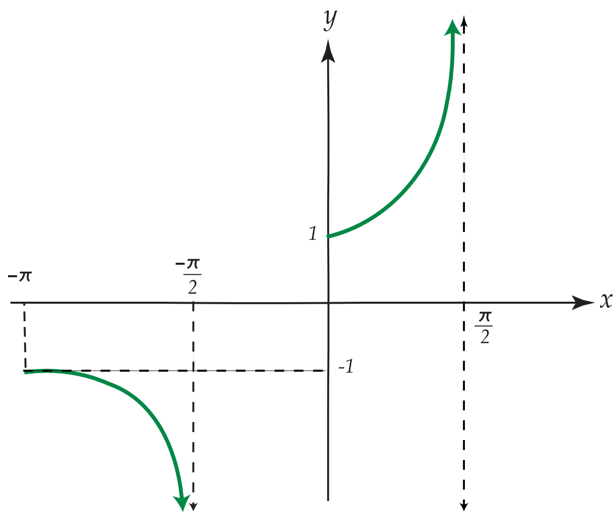


Figura 2.19: Gráfica de la función secante

Como puede observarse, la función secante es continua en I, siendo estrictamente decreciente en $\left[-\pi, \frac{-\pi}{2}\right]$ y estrictamente creciente en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Existe por tanto la función secante inversa, llamada también arco secante y se denota arcsec, definida por:

$$f :]-\infty, -1[\ \cup\ ]1, +\infty[\longrightarrow \left[-\pi, \frac{-\pi}{2}\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ f(x) = \operatorname{arcsec} x$$

Por la definición de función arcosecante se tiene que:

$y = \operatorname{arcsec} x \iff x = \sec y = x$ con $y \in \left[-\pi, \frac{-\pi}{2}\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $x \in]-\infty, -1[\ \cup\ ]1, +\infty[$

Luego, $\operatorname{arcsec}(k)$ con $k \in]-\infty, -1[\ \cup\ ]1, +\infty[$ es el único número α con $\alpha \in \left[-\pi, \frac{-\pi}{2}\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que $\sec \alpha = k$.

Ejemplo 9

a. $\operatorname{arcsec}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$ pues $\sec\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}$

b. $\text{arcsec}(-1) = \pi$ pues $\sec(\pi) = -1$

c. $\text{arcsec}(2) = \dfrac{\pi}{3}$ pues $\sec\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 2$

La representación gráfica de la función arcosecante es la siguiente:

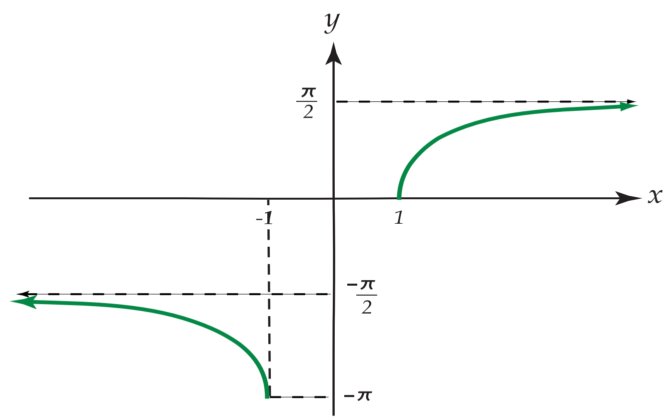


Figura 2.20: Gráfica de la función arcosecante

Note que:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \text{arcsec}\, x = \dfrac{\pi}{2}^{-}$ pues $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^{-}} \sec x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \text{arcsec}\, x = \dfrac{-\pi}{2}^{-}$ pues $\lim\limits_{x\to\frac{-\pi}{2}^{-}} \sec x = -\infty$

Derivada de la función secante inversa

Como $y = \text{arcsec}\, x \iff x = \sec y$ con $y \in \left[-\pi, \dfrac{-\pi}{2}\right[\;\cup\; \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $x \in\,]-\infty, -1[\; \cup\;]1, +\infty[$, utilizando el teorema de la derivada de la función inversa se obtiene que:

$$D_x(\text{arcsec}\, x) = \frac{1}{D_y \sec y} = \frac{1}{\sec y\ \tan y}$$

Como $\tan^2 y = \sec^2 y - 1$, y $\tan y > 0$ cuando $y \in \left[-\pi, \dfrac{-\pi}{2}\right[\;\cup\; \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, entonces $\tan y = \sqrt{\sec^2 y - 1} = \sqrt{x^2-1}$ pues $x = \sec y$

Luego $D_x(\text{arcsec}\, x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, con $|x| > 1$

En general, si $u = f(x)$ con $|f(x)| > 1$ entonces $D_x(\text{arcsec}\, u) = \dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \cdot D_x u$

■ **Ejemplo 10**

1. $D_x(\text{arcsec}(2x)) = \dfrac{1}{2x\sqrt{(2x)^2-1}} \cdot D_x(2x) = \dfrac{2}{2x\sqrt{4x^2-1}}, \quad x > \dfrac{1}{2}$

2. $D_x\left(\text{arcsec}\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = \dfrac{1}{\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}} \cdot D_x\dfrac{1}{x} = \dfrac{-1}{x^2\cdot\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}} = \dfrac{-1}{x\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}, \quad |x| < 1$

Ejercicios.

Determine $D_x h(x)$ si:

a. $h(x) = \text{arcsec}\sqrt{x}$

b. $h(x) = \text{arcsec}(3x+2)$

Nota: La función secante inversa también suele definirse por la siguiente igualdad:

$$\text{arcsec}\, x = \arccos\left(\frac{1}{x}\right) \text{ con } |x| \geq 1$$

En este caso $D_x\,\text{arcsec}(x) = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ con $|x| > 1$

Se deja como ejercicio para el estudiante que compruebe esta igualdad.

Función cosecante inversa

Tomaremos como dominio de la función cosecante el intervalo $I = \left[-\pi, \dfrac{-\pi}{2}\right] \cup \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, en el que la función cosecante es biunívoca.

La representación gráfica de la función cosecante en el intervalo señalado es la siguiente:

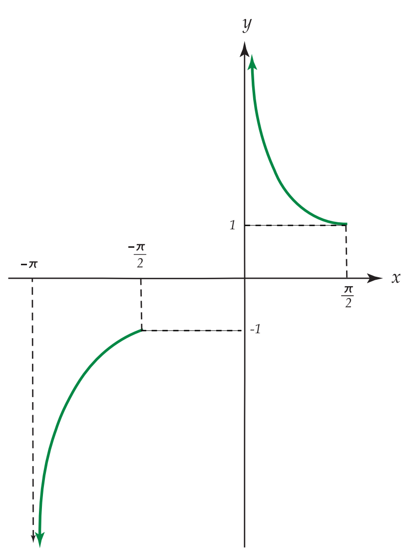


Figura 2.21: Gráfica de la función cosecante

Como puede observarse, la función cosecante es continua en I, siendo estrictamente creciente en $\left[-\pi, \frac{-\pi}{2}\right]$ y estrictamente decreciente en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Existe por tanto la función cosecante inversa, llamada también arco cosecante y que se denota arccsc, definida por:

$$f :]-\infty, -1[\;\cup\;]1, +\infty[\longrightarrow \left[-\pi, \frac{-\pi}{2}\right] \;\cup\; \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\; f(x) = \operatorname{arccsc} x$$

Por la definición de función arco cosecante se tiene que:

$y = \operatorname{arccsc} x \iff x = \csc y$ con $y \in \left[-\pi, \frac{-\pi}{2}\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

Luego, $\operatorname{arccsc}(k)$ con $k \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ es el único número α con $\alpha \in \left[-\pi, \frac{-\pi}{2}\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que $\csc \alpha = k$.

Ejemplo 11

a. $\operatorname{arccsc}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3}$ pues $\csc\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}$

b. $\operatorname{arccsc}(-1) = \frac{-\pi}{2}$ pues $\csc\left(\frac{-\pi}{2}\right) = -1$

c. $\operatorname{arccsc}(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$ pues $\csc\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

d. $\operatorname{arccsc}(-2) = \frac{-5\pi}{6}$ pues $\csc\left(\frac{-5\pi}{6}\right) = -2$

La representación gráfica de la función arcocosecante es la siguiente:

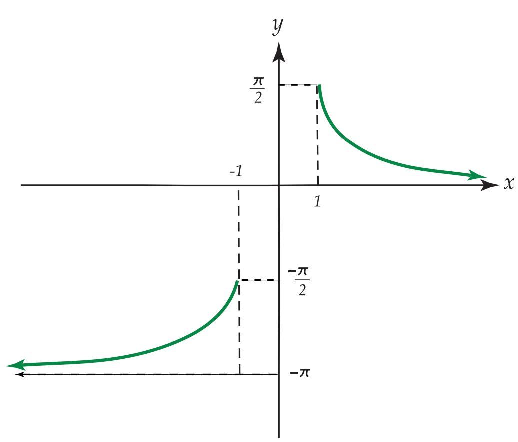


Figura 2.22: Gráfica de la función arcocosecante

Note que:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arccsc} x = 0^+$ pues $\lim\limits_{x\to 0^+} \csc x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arccsc} x = -\pi^+$ pues $\lim\limits_{x\to -\pi^+} \csc x = -\infty$

Derivada de la función cosecante inversa

Como $y = \operatorname{arccsc} x \iff x = \csc y$ para $y \in \left[-\pi, \frac{-\pi}{2}\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $x \in]-\infty, -1[\ \cup\ ]1, +\infty[$, utilizando el teorema de la derivada de la función inversa se obtiene que:

$$D_x(\operatorname{arccsc} x) = \frac{1}{D_y \csc y} = \frac{1}{-\csc y\ \cot y} = \frac{-1}{\csc y\ \cot y}$$

Como $\cot^2\ y = \csc^2\ y - 1$, y $\cot y > 0$ para $y \in \left[-\pi, \frac{-\pi}{2}\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, entonces $\cot y = \sqrt{\csc^2\ y - 1} = \sqrt{x^2-1}$ pues $x = \csc y$.

Luego $D_x(\operatorname{arccsc} x) = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$, para $|x| > 1$

En general, si $u = f(x)$ con $|f(x)| > 1$ entonces $D_x(\operatorname{arccsc} u) = \dfrac{-1}{u\sqrt{u^2-1}} \cdot D_x u$

Ejemplo 12

1. $D_x(\operatorname{arccsc}\left(x^2\right)) = \dfrac{-1}{x^2\sqrt{(x)^4-1}} \cdot D_x(x^2) = \dfrac{-2x}{x^2\sqrt{x^4-1}} = \dfrac{-2}{x\sqrt{x^4-1}}$, $x > 1$

2. $D_x(\operatorname{arccsc}(e^x)) = \dfrac{-1}{e^x\sqrt{e^{2x}-1}} \cdot D_x e^x = \dfrac{-e^x}{e^x\sqrt{e^{2x}-1}} = \dfrac{-1}{\sqrt{e^{2x}-1}}$, $x > 0$

Ejercicios.

Determine $D_x h(x)$ si:

a. $h(x) = \operatorname{arccsc}(\sqrt[3]{x})$

b. $h(x) = \operatorname{arccsc}(\dfrac{2}{x})$

Nota:

La función cosecante inversa también suele definirse por la siguiente igualdad:

$\operatorname{arccsc} x = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ con $|x| \geq 1$.

Además $D_x \operatorname{arccsc} x = \dfrac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ con $|x| > 1$, igualdad que debe comprobar el estudiante como ejercicio.

Verifiquemos que $\operatorname{arccsc} x = \operatorname{arcsec} \dfrac{1}{x}$.

$\operatorname{arccsc} x = y \iff \csc y = x \iff \frac{1}{\operatorname{sen} y} = x \iff \frac{1}{x} = \operatorname{sen} y \iff \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right) = y$

Luego $\operatorname{arccsc} x = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right)$, y se verifica la igualdad.

2.1.14 Funciones paramétricas

En algunos casos la ecuación de una función o de una relación no está dada en la forma $y = f(x)$ o $f(x, y) = 0$, como en las igualdades $y = 5x^2 + 3x$, o, $x^2 + y^2 = 4$, sino que está determinada por un par de ecuaciones en términos de una misma variable.

Ejemplo 1

Consideremos las ecuaciones $x = t^2 - 2t$, $y = t + 1$ con $t \in \mathbb{R}$.

Se tiene que a cada valor de t le corresponde un punto (x, y) del plano, el conjunto de los cuales determina una relación $\mathbb{R}$ x $\mathbb{R}$.

La siguiente tabla de valores:

t	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
x	24	15	8	3	0	-1	0	3	8	15
y	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6

nos permite hacer la representación gráfica de la relación de la siguiente manera:

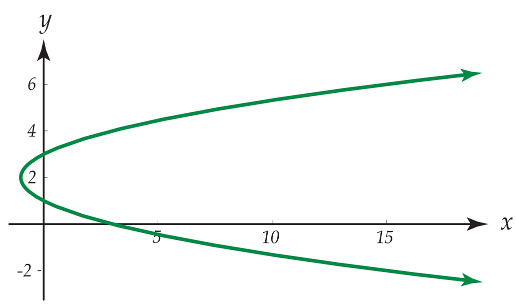


Figura 2.23: Gráfica de $x = t^2 - 2t$, $y = t + 1$ con $t \in \mathbb{R}$

raya
En general, las ecuaciones $x = g(t)$, $y = h(t)$ con h y g funciones continuas en un intervalo I, $(I \subseteq \mathbb{R})$ reciben el nombre de ecuaciones paramétricas o representación paramétrica de una curva en el plano XY. La gráfica de las ecuaciones paramétricas está dada por el conjunto de puntos del plano XY, que se obtiene cuando t, que recibe el nombre de parámetro, toma todos sus valores posibles en el dominio I.

La relación que determinan las ecuaciones paramétricas, en general no es una función, como sucede en el ejemplo anterior. Sin embargo, en algunos casos, la relación dada sí es una función.

Ejemplo 2

Sean $x = \dfrac{t}{2}$, $y = \dfrac{t^2}{4} - 1$ con $t \in \mathbb{R}$.

Obtenemos la siguiente tabla de valores:

t	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x	$\frac{-5}{2}$	-2	$\frac{-3}{2}$	-1	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
y	$\frac{21}{4}$	3	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{-3}{4}$	-1	$\frac{-3}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	3

La representación gráfica es la siguiente:

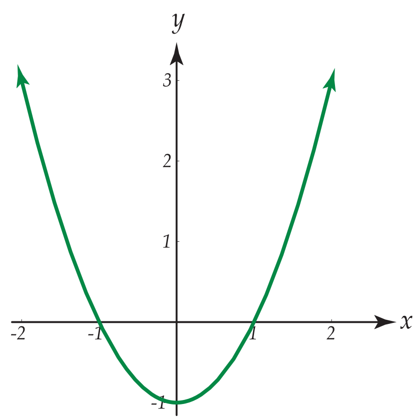


Figura 2.24: Gráfica de $x = \dfrac{t}{2}, \;\; y = \dfrac{t^2}{4} - 1$ con $t \in \mathbb{R}$

En este caso, al sustituir $x = \dfrac{t}{2}$ en $y = \dfrac{t^2}{4} - 1$ se obtiene que $y = x^2 - 1$ que es la ecuación de la parábola con el eje Y como el eje de simetría por lo que sí es una función. Note que la ecuación obtenida involucra únicamente las variables "x" e "y". Se dice entonces que el parámetro ha sido eliminado.

En algunos casos, en la eliminación del parámetro se utiliza una o más identidades trigonométricas como se muestra a continuación.

Ejemplo 3

Sea Q la relación con representación paramétrica $x = 2 \;\operatorname{sen} t, \;\; y = 2 \;\cos t$ con $t \in \mathbb{R}$.

Se tiene que $Q = \{(x, y)$ tal que $x = 2 \;\operatorname{sen} t, \;\; y = 2 \;\cos t, \;\; t \in \mathbb{R}\}$

Vamos a expresar la relación Q utilizando únicamente las variables "x" e "y" como sigue:

$x^2 + y^2 = (2 \operatorname{sen} t)^2 + (2 \cos t)^2$

$= 4 \operatorname{sen}^2 t + 4 \cos^2 t$

$= 4(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t) = 4$

de donde $x^2 + y^2 = 4$ es la ecuación de una circunferencia con centro en $(0, 0)$ y radio 2. Luego Q no representa una función y su representación gráfica es la siguiente:

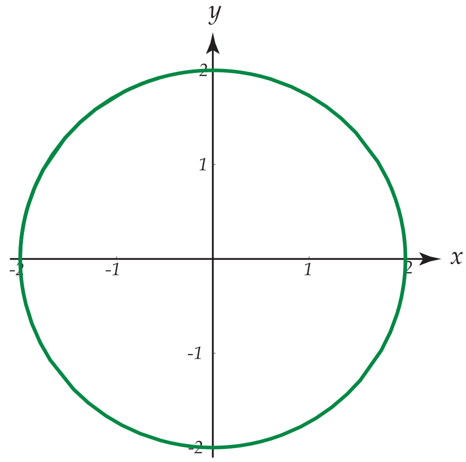


Figura 2.25: Gráfica de $x = 2\ \text{sen}\, t,\ \ y = 2\ \cos t$ con $t \in \mathbb{R}$

Q puede expresarse entonces como:

$$Q = \{(x, y)/\ x^2 + y^2 = 4\ \ x \in [-2, 2],\ \ y \in [-2, 2]\}$$

Ejemplo 4

Sea ahora $\Re$ la relación con representación paramétrica $x = 2t,\ \ y = \dfrac{6}{t}$ con $t \in \mathbb{R} - \{0\}$.

En este caso $\Re = \{(x, y)/\ x = 2t,\ \ y = \dfrac{6}{t}\ \ t \in \mathbb{R},\ \ t \neq 0\}$

Para expresar $\Re$ en términos de "x" e "y", se despeja t en alguna de las ecuaciones y se sustituye en la otra como se muestra a continuación:

Si $x = 2t$ entonces $t = \dfrac{x}{2}$, y $y = \dfrac{6}{\frac{x}{2}} = \dfrac{12}{x}$

Luego la ecuación $y = \dfrac{12}{x}$ para $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, tiene como representación gráfica la siguiente:

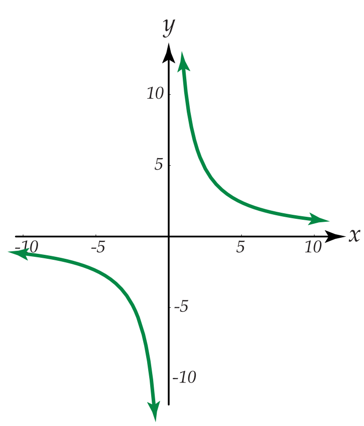


Figura 2.26: Gráfica de $x = 2t,\ \ y = \dfrac{6}{t}$ con $t \in \mathbb{R} - \{0\}$

Ejemplo 5

Por último verifiquemos que $\dfrac{(x-3)^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ es una ecuación de la relación determinada por las ecuaciones paramétricas $x=3(1-\cos\theta)$, $y=2\ \operatorname{sen}\theta,$ con $\theta\in\mathbb{R}$.

Como $x=3(1-\cos\theta)$ entonces $\cos\theta=1-\dfrac{x}{3}$, y como $y=2\ \operatorname{sen}\theta$ entonces $\operatorname{sen}\theta=\dfrac{y}{2}$

Luego $\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=\left(\dfrac{y}{2}\right)^2+(1-\dfrac{x}{3})^2$, de donde $1=\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{(x-3)^2}{9}$, que es la ecuación de una elipse con centro en $(3,0)$.

Su representación gráfica es la siguiente:

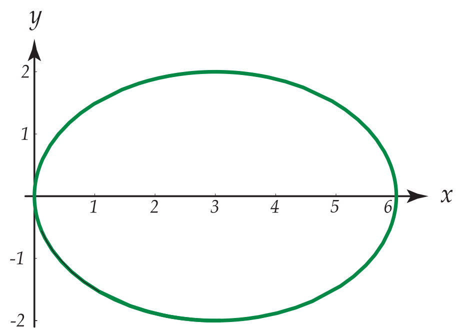


Figura 2.27: Gráfica de $x=3(1-\cos\theta)$, $y=2\ \operatorname{sen}\theta,$ con $\theta\in\mathbb{R}$

Derivada de la función dada paramétricamente

El siguiente teorema nos proporciona las condiciones necesarias para obtener la derivada de una función dada en forma paramétrica.

Teorema 1

Sean f y g funciones derivables en un intervalo $]t_1,t_2[$. Supongamos que f tiene una inversa derivable en ese intervalo. Entonces en cada punto donde $f'(t)\neq 0$, las ecuaciones $x=f(t)$, $y=g(t)$ implican que existe una función derivable F tal que $y=f(x)$, y además $D_xy=\dfrac{g'(t)}{f'(t)}=\dfrac{D_ty}{D_tx}$

Prueba: Al final del capítulo

Ejemplo 6

1. Determine D_xy si $x=e^t$, $y=1+t^2$ con $t\in\mathbb{R}$

   Solución:

   Por el teorema anterior se tiene que $D_xy=\dfrac{D_ty}{D_tx}$

   Luego:

$D_t y = 2t, \;\; D_t x = e^t \;\; (e^t \neq 0 \;\text{ para todo }\; t \in \mathbb{R})$ por lo que $D_x y = \dfrac{2t}{e^t}$

2. Determinar los puntos de la curva con ecuaciones $x = \dfrac{t^2}{t^2+1}, \;\; y = \dfrac{t}{t^2-1}$ en los que que es cero la pendiente de la recta tangente a la curva.

   Solución:

   Recuerde que la pendiente de la recta tangente está dada por $D_x y$.

   Como $D_t x = \dfrac{-2t}{(t^2-1)^2}$, y $D_t y = -\dfrac{1+t^2}{(t^2-1)^2}$ entonces $D_x y = \dfrac{t^2+1}{2t}$

   La pendiente de la recta tangente es cero cuando $D_x y = 0$, en este caso cuando $t^2 + 1 = 0$; pero esta igualdad no se cumple para ningún valor real de t. Luego, no existe ningún punto de la curva dada donde la pendiente de la recta tangente sea cero.

3. Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva con ecuaciones $x = Bt, \;\; y = Ct - dt^2$ cuando $t = 0$

   Solución:

   La ecuación de la recta tangente está dada por $y = mx + b$, donde $m = D_x y$.

   Se tiene que $D_x y = \dfrac{D_t y}{D_t x} = \dfrac{C - 2dt}{B}$

   Cuando $t = 0$ entonces $D_x y = \dfrac{C}{B}$, por lo que $y = \dfrac{C}{B}x + b \;\; (*)$

   Cuando $t = 0$ se obtiene $x = 0, \;\; y = 0$, y al sustituir en $(*)$ se obtiene: $b = 0$.

   Luego, la ecuación de la recta tangente es: $y = \dfrac{C}{B}x$

Derivadas de orden superior para una función dada en forma paramétrica

Si x y y están dadas en forma paramétrica entonces $D_x^2 y$ puede expresarse como sigue:

$$D_x^2 y = D_x(D_x y) = \frac{D_t(D_x y)}{D_t x}$$

Ejemplo 7

Si $x = 2t^3 + \operatorname{sen} t, \;\; y = t^2 - \cos t$ entonces $D_x y = \dfrac{2t + \operatorname{sen} t}{6t^2 + \cos t}$ y $D_x^2 y = \dfrac{D_t(D_x y)}{D_t x} = \dfrac{D_t\left(\frac{2t+\operatorname{sen} t}{6t^2+\cos t}\right)}{D_t(2t^3 + \operatorname{sen} t)}$

$$= \frac{(6t^2+2)\cos t + 1 - 12t^2 - 10 \;\operatorname{sen} t}{(6t^2+\cos t)^2(6t^2+\cos t)}$$

En general, para obtener la enésima derivada, cuando las ecuaciones están dadas en forma paramétrica, se aplica la siguiente igualdad:

$$D_x^n y = \frac{D_t(D_x^{n-1}y)}{D_t x}$$

2.1.15 Funciones implícitas y su derivada

Al considerar la función con ecuación $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 1$, es posible determinar $f'(x)$ con los teoremas enunciados anteriormente, ya que f es una función dada implícitamente en términos de la variable independiente x.

Sin embargo, existen funciones que no están definidas en forma explícita, ejemplos de las cuales son las siguientes:

$3x^2y^2 - 5xy^3 + x = 5, \quad x^2 - x = 5xy^2 - y^4$

Estas ecuaciones no pueden ser resueltas explícitamente para "y" en términos de "x". Se dice que la función f está definida implícitamente por las ecuaciones:

$3x^2[f(x)]^2 - 5x[f(x)]^3 + x = 5$ y $x^2 - x = 5x[f(x)]^2 - [f(x)]^4$, respectivamente.

Note que ambas expresiones son de la forma general $f(x, y) = 0$.

Interesa ahora determinar la derivada de una función dada en forma implícita.

Consideremos cada una de las ecuaciones anteriores:

a. $3x^2[f(x)]^2 - 5x[f(x)]^3 + x = 5$

Observe que $3x^2[f(x)]^2$ involucra un producto de funciones y que para derivar $[f(x)]^2$ se debe utilizar la regla de la cadena.

Se tiene entonces derivando:

$$3x^2 \cdot 2[f(x)] \cdot D_x f(x) + 6x\,[f(x)]^2 - \left[5x \cdot 3[f(x)]^2 \cdot D_x f(x) + 5[f(x)]^3\right] + 1 = 0$$

$$6x^2 f(x) \cdot D_x f(x) + 6x[f(x)]^2 - 15x[f(x)]^2 \cdot D_x f(x) - 5[f(x)]^3 + 1 = 0$$

Despejando $D_x f(x)$ se tiene que:

$$D_x f(x) = \frac{5[f(x)]^3 - 6x[f(x)]^2 - 1}{6x^2 f(x) - 15x[f(x)]^2}$$

Sustituyendo "y" por $f(x)$ se obtiene:

$$D_x y = \frac{5y^3 - 6xy^2 - 1}{6x^2 y - 15xy^2}$$

b. $x^2 - x = 5x[f(x)]^2 - [f(x)]^4$ derivando

$2x - 1 = 5x \cdot 2f(x) \cdot D_x f(x) + 5[f(x)]^2 - 4[f(x)]^3 \cdot Dxf(x)$

$2x - 1 = 10xf(x) \cdot D_x f(x) + 5[f(x)]^2 - 4[f(x)]^3 \cdot D_x f(x)$

$2x - 1 - 5[f(x)]^2 = (10x\ f(x) - 4[f(x)]^3) \cdot D_x f(x)$

de donde $f'(x) = \dfrac{2x - 1 - 5[f(x)]^2}{10x\ f(x) - 4[f(x)]^3}$

y sustituyendo $y = f(x)$ se tiene:

$$D_x y = y' = \frac{2x - 1 - 5y^2}{10xy - 4y^3}$$

El proceso realizado en estos dos ejemplos recibe el nombre de derivación implícita, y puede ser utilizado únicamente bajo el supuesto de que la ecuación dada especifica una función. En caso de que no sea así, aunque se realicen las operaciones, el resultado carece de sentido.

Por ejemplo, la ecuación $x^2 + y^2 + 9 = 0$ no puede ser satisfecha por ningún valor real de "x" y "y". Al realizar el procedimiento anterior se obtiene que $2x + 2y \cdot D_x y + 0 = 0$ de donde $D_x y = \dfrac{-x}{y}$, fórmula que parece tener significado para "x" y "y" siempre que $y \neq 0$, aunque de hecho no puede existir derivada ya que la ecuación dada no especifica ninguna función f.

La derivación implícita determina una fórmula para $D_x f(x)$, que es válida para toda función derivable f tal que $f(x)$ esté definida implícitamente por una ecuación dada.

Ejemplo 1

1. Suponiendo que existe una función derivable f tal que $f(x)$ está definida implícitamente por la ecuación $x^3 + y^3 - 3x^2 + 3y^2 = 0$, calcular $D_x y$.

   Solución:

   Derivando implícitamente se obtiene:

   $3x^2 + 3y^2 \cdot D_x y - 6x + 6y \cdot D_x y = 0$

   $(3y^2 + 6y) \cdot D_x y = 6x - 3x^2$

   $$D_x y = \frac{6x - 3x^2}{3y^2 + 6y} = \frac{2x - x^2}{y^2 + 2y}$$

   Note que hemos trabajado como si $y = f(x)$.

2. En cada caso determinar una ecuación para la recta tangente y una ecuación para la recta normal a la gráfica de la ecuación dada en el punto P. Graficar la curva, la recta tangente y la recta normal.

a. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 24 = 0, \ \ P(1, 3)$.

b. $y^2 = 4ax; \ \ P(a, 2a), \ \ a > 0$.

Solución:

a. Primero obtenemos $D_x y$ que nos da la pendiente de la recta tangente: $2x+2y \cdot D_x y - 4 + 6 \cdot D_x y - 0 = 0$ de donde $D_x y = \dfrac{2-x}{y+3}$

Evaluando $D_x y$ en $P(1, 3)$ se tiene que $m_t = \dfrac{1}{6}$.

Luego $y = \dfrac{1}{6}x + b$. Sustituyendo $(1, 3)$ se obtiene que $b = \dfrac{17}{6}$ por lo que la ecuación de la recta tangente es $y = \dfrac{1}{6}x + \dfrac{17}{6}$.

La pendiente de la recta normal es $m_N = -6$ de donde la ecuación de esta recta es: $y = -6x + b_1$; sustituyendo nuevamente en $(1, 3)$ se obtiene que $b_1 = 9$.

La ecuación de la recta normal es: $y = -6x + 9$.

La ecuación $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 24 = 0$ puede escribirse como $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 36$ que representa la ecuación de una circunferencia con centro en $(2, -3)$ y radio 6.

La representación gráfica de la curva y las rectas es la siguiente:

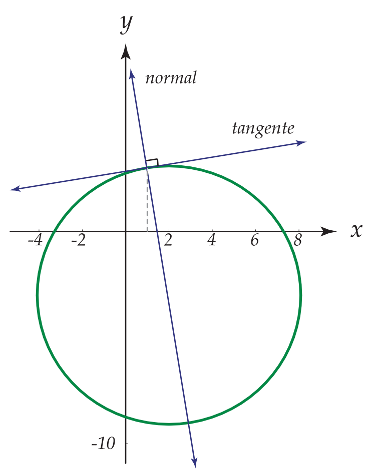


Figura 2.28: Gráfica de $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 24 = 0$

b. Dada la ecuación $y^2 = 4ax$ obtenemos $D_x y$. como $2y \cdot D_x y = 4a$ entonces $D_x y = \dfrac{2a}{y}$

Evaluando en $P(a, 2a)$ se tiene que $D_x y = \dfrac{2a}{2a} = 1$.

Luego, la pendiente de la recta tangente es $m_T = 1$ y la ecuación es $y = x+b$. Sustituyendo $(a, 2a)$ en esta ecuación se obtiene que $b = a$ por lo que finalmente la ecuación de la recta tangente es $y = x+a$.

La pendiente de la recta normal es $m_N = -1$ y la respectiva ecuación es: $y = -x + b$. Sustituyendo (x, y) por $(a, 2a)$ se obtiene que $b = 3a$ por lo que la ecuación de la recta normal es $y = -x + 3a$.

La representación gráfica de la curva, las recta tangente y de la recta normal es la siguiente:

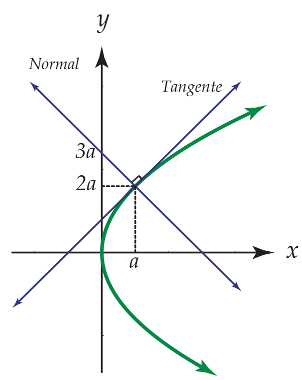


Figura 2.29: Gráfica de $y^2 = 4ax$

Ejercicios.

1. Probar que las rectas tangentes en el origen a las curvas con ecuaciones $4y^3 - x^2y - x + 5y = 0$, $x^4 - 4y^3 + 5x + y = 0$, son perpendiculares entre sí.

2. En cada caso:

   a. Determinar $D_x y$ en términos de "x" y "y" utilizando la derivación implícita.

   b. Despejar "y" en términos de "x" y demostrar que cada solución y su derivada satisfacen la ecuación obtenida en a.

      i $x^2 - 2xy = 5$

      ii $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, a constante.

      iii $2x^2 - 3xy - 4y^2 = 5$

3. Determinar la ecuación de la recta normal a la curva con ecuación $x - y = \sqrt{x + y}$ en el punto $(3, 1)$.

Derivada de segundo orden para una función dada en forma implícita

Especificaremos en los ejemplos siguientes el procedimiento que se sigue para determinar $D_x^2 y$.

Ejemplo 2

Sea la ecuación $x^3 - xy + y^3 = 0$, obtenemos primero $D_x y$ en la forma siguiente:

$3x^2 - (x \cdot D_x y + y) + 3y^2 \cdot D_x y = 0$

de donde $D_x y = \dfrac{y - 3x^2}{3y^2 - x}$

ahora $D_x^2 y = D_x(D_x y) = D_x \left(\dfrac{y - 3x^2}{3y^2 - x} \right)$

$$D_x^2 y = \frac{(3y^2 - x)(D_x y - 6x) - (y - 3x^2)(6yD_x y - 1)}{(3y^2 - x)^2}$$

se sustituye $D_x y$, y se obtiene:

$$D_x^2 y = \frac{(3y^2 - x)\left(\frac{y-3x^2}{3y^2-x} - 6x \right) - (y - 3x^2)\left(6y \cdot \frac{y-3x^2}{3y^2-x} - 1 \right)}{(3y^2 - x)^2}$$

Simplificando:

$D_x^2 y = \dfrac{2xy\ (27xy - 27(x^3 + y^3) - 2)}{(3y^2 - x)^3}$ pero de la ecuación original $x^3 + y^3 = xy$ por lo que: $27xy - 27xy - 2 = -2$,
y $D_x^2 y = \dfrac{-4xy}{(3y^2 - x)^3}$

Ejemplo 3

Determinar $D_x^2 y$ si $ax^2 + 2xy + by^2 = 1$

Primero calculamos $D_x y$

$2ax + 2x \cdot D_x y + 2y + 2by \cdot D_x y = 0$

$$D_x y = \frac{-2ax - 2y}{2x + 2by} = \frac{-ax - y}{x + by}$$

Luego:

$$D_x^2 y = D_x(D_x y) = D_x \left(\frac{-ax - y}{x + by} \right)$$

$$D_x^2 y = \frac{(x + by)(-a - D_x y) - (-ax - y)(1 + b \cdot D_x y)}{(x + by)^2}$$

$$D_x^2 y = \frac{(abx - x)D_x y - aby + y}{(x + by)^2}$$

$D_x^2 y = \dfrac{(ab - 1)(x \cdot D_x y - y)}{(x + by)^2}$ sustituyendo $D_x y$ se tiene:

$$D_x^2 y = \frac{(ab - 1)\left(x \cdot \frac{-ax-y}{x+by} - y \right)}{(x + by)^2}$$

$$D_x^2 y = \frac{-(ab - 1)(ax^2 + 2xy + by^2)}{(x + by)^2}$$

$D_x^2 y = \dfrac{-(ab - 1)(1)}{(x + by)^3} = \dfrac{1 - ab}{(x + by)^3}$ pues $ax^2 + 2xy + by^2 = 1$ en la ecuación original.

Ejercicios.

Determine $D_x^2 y$ y exprese el resultado en la forma más simplificada posible.

a. $x^2 - 2y^2 = 4$

b. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ a cte.

c. $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ a cte, b cte.

2.1.16 Teorema de Rolle (o teorema sobre las raíces de la derivada)

Teorema 1

Sea f una función que cumple las condiciones siguientes:

1. f es continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$.

2. f es derivable sobre un intervalo abierto $]a, b[$.

3. $f(a) = f(b) = 0$.

Entonces existe por lo menos un número real c tal que $a < c < b$ y $f'(c) = 0$. O sea $f'(x) = 0$ para cierto c entre a y b.

Interpretación geométrica

Este teorema puede interpretarse geométricamente de la manera siguiente:

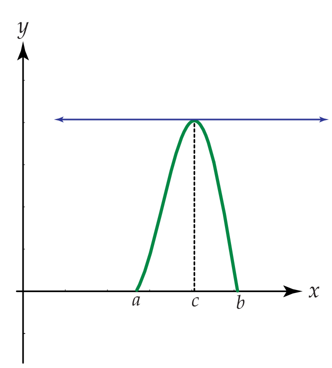


Figura 2.30: Interpretación geométrica del Teorema de Rolle

Si una curva continua interseca al eje X en $(a, 0)$ y $(b, 0)$ y tiene una recta tangente en cada uno de los puntos del intervalo $]a, b[$, entonces existe por lo menos un punto de la curva en el que la recta tangente es paralela al eje X.

Gráficamente se tiene:

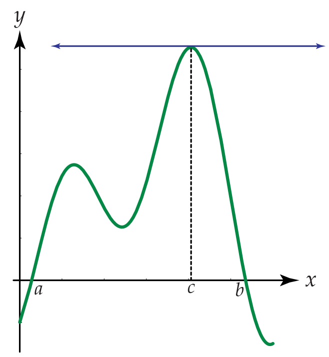
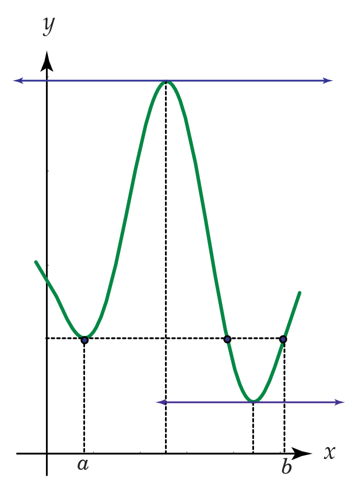


Figura 2.31: Interpretación geométrica del Teorema de Rolle

El teorema también es válido para una función derivable que aunque en los extremos del intervalo $[a, b]$ no interseque al eje X, sí tome valores iguales para a y b, es decir, $f(a) = f(b)$.



Es necesario que la función posea derivada en todos los puntos del intervalo, ya que aunque la función sea continua en el intervalo, si no es derivable en algún punto, puede suceder que no exista ningún valor c para el que $f'(c)$ sea igual a cero.

Ejemplo 1

La función f con ecuación $f(x) = 2 + \sqrt[3]{x^2}$ es continua en el intervalo $[-1, 1]$ y además se cumple que $f(-1) = f(1)$, pero la derivada de f, $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ no está definida para $x = 0$, $(0 \in]-1, 1[)$, y se tiene que $f'(x)$ no se hace cero en el intervalo dado.

La representación gráfica de esta función en el intervalo $[-1, 1]$ es la siguiente:

Ejemplo 2

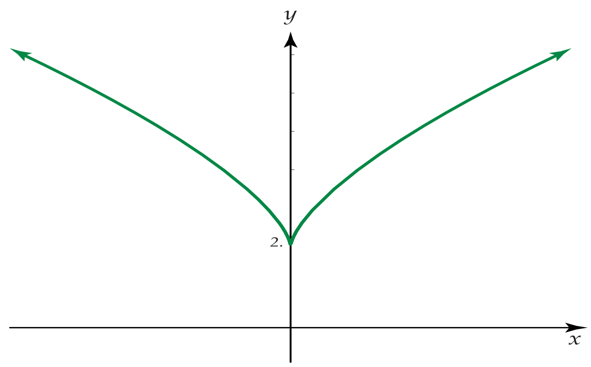


Figura 2.32: Gráfica de $f(x) = 2 + \sqrt[3]{x^2}$

Para cada una de las funciones cuyas ecuaciones se dan a continuación, verificar que se cumplen las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo indicado, y determinar un valor adecuado c que satisfaga la conclusión de este teorema:

1. $f(x) = x^2 - 3x + 2;\ \ [1, 2]$

2. $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2;\ \ [-1, 2]$

3. $f(x) = x^3 + 5x^2 - 6x;\ \ [0, 1]$ Ejercicio para el estudiante

4. $f(x) = \cos^2\ x;\ \ \left[\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ Ejercicio para el estudiante

Solución:

1. Por ser f una función polinomial es derivable y por lo tanto continua para todo $x \in \mathbb{R}$. se cumplen entonces las dos primeras condiciones en el intervalo $[1, 2]$.

   Además $f(1) = 0$ y $f(2) = 0$ por lo que la curva interseca al eje X y se cumple la tercera condición.

   Luego, debe existir por lo menos un número $c \in]1, 2[$ tal que $f'(x) = 0$.

   Como $f'(x) = 2x - 3$ y $f'(x) = 0$ si y solo si $x = \frac{3}{2}$ entonces puede tomarse $c = \frac{3}{2}$, $\frac{3}{2} \in]1, 2[$.

   Luego en el punto $\left(\frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$ la recta tangente es paralela al eje X.

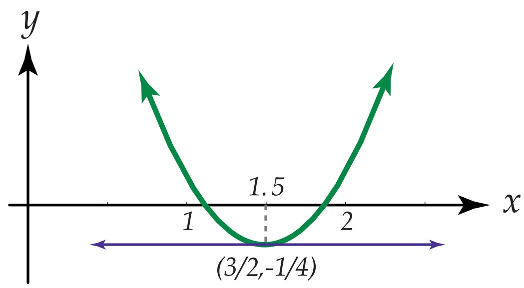


Figura 2.33: Gráfica de $x^2 - 3x + 2$

2. De nuevo, f es una función polinomial y por tanto es derivable, y continua para toda $x \in \mathbb{R}$. En particular, en el intervalo $[-1, 2]$ se cumplen las dos primeras condiciones.

   Además $f(-1) = 0$ y $f(2) = 0$ verificándose la tercera condición.

   Luego, el teorema es válido en el intervalo $[-1, 2]$ y existe $c \in]-1, 2[$ tal que $f'(c) = 0$. Como $f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$ entonces $f'(x) = 0$ si y solo si $x = \dfrac{2+\sqrt{7}}{3}$ o $x = \dfrac{2-\sqrt{7}}{3}$. Note que ambos valores pertenecen al intervalo $]-1, 2[$.

   Luego, en los puntos $\left(\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}, \dfrac{-8-27\sqrt{7}}{27}\right)$ y $\left(\dfrac{2-\sqrt{7}}{3}, \dfrac{-116-26\sqrt{7}}{27}\right)$, la recta tangente tiene pendiente cero y por tanto dicha recta es paralela al eje X.

2.1.17 Teorema del valor medio para derivadas (Teorema de Lagrange)

Teorema 1

Sea f una función que cumple las propiedades siguientes:

1. Es continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$.

2. Es derivable sobre un intervalo abierto $]a, b[$.

Entonces existe por lo menos un número c tal que $a < c < b$ y $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Prueba: Al final del capítulo

Este teorema se utiliza para demostrar varios teoremas tanto del cálculo diferencial como del cálculo integral.

En su demostración se utilizará el teorema de Rolle.

Interpretación geométrica

El teorema del valor medio puede interpretarse geométricamente como sigue:

Consideremos la representación gráfica de una curva continua f:

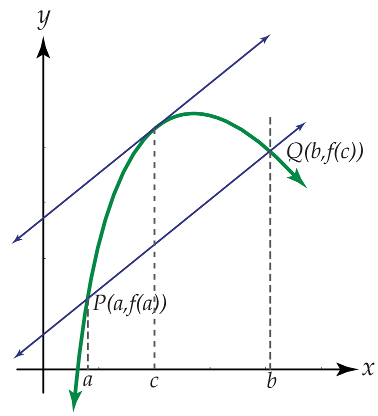


Figura 2.34: Interpretación geométrica del Teorema del Valor Medio

La recta secante que une los puntos $P(a, f(a))$, $Q(b, f(b))$ tiene como pendiente $m_s = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Según el teorema del valor medio, debe existir algún punto sobre la curva, localizado entre P y Q, en el que la recta tangente sea paralela a la recta secante que pasa por P y Q; es decir, existe algún número $c \in]a, b[$ tal que $m_s = f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Ejemplo 1

Para cada función cuya ecuación se da, verificar que se cumplen las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo dado, y determinar un valor adecuado c que satisfaga la conclusión de este teorema:

1. $f(x) = x^3 + x^2 - x;\ \ [-2, 1]$

2. $f(x) = \sqrt{10 - x^2};\ \ [-6, 8]$

3. $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x-1};\ \ \left[\dfrac{3}{2}, 3\right]$

4. $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{x - 7};\ \ [2, 6]$

Solución:

1. Por ser f una función polinomial, es derivable para toda $x \in \mathbb{R}$ por lo que debe existir por lo menos un número $c \in]-2, 1[$ tal que:

   $$f'(c) = \frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} = \frac{1 - (-2)}{3} = 1$$

   Además $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$ por lo que $f'(c) = 3c^2 + 2c - 1$.

Como $f'(c) = 1$ entonces $3c^2 + 2c - 1 = 1$ por lo que $c = \dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}$ o $c = \dfrac{-1-\sqrt{7}}{3}$.

Luego en $\left(\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}, \dfrac{11-5\sqrt{7}}{27}\right)$ y en $\left(\dfrac{-1-\sqrt{7}}{3}, \dfrac{11+5\sqrt{7}}{27}\right)$ la recta tangente es paralela a la recta secante que pasa por los puntos $(-2,-2)$ y $(1,1)$.

2. Como f es continua en el intervalo $[-10,10]$ y derivable en el intervalo $]-10,10[$ cumplirá ambas condiciones en el intervalo $[-6,8] = [a,b]$.

   Luego debe existir por lo menos un número $c \in]-6,8[$ tal que

   $$f'(c) = \frac{f(8) - f(-6)}{8-(-6)} = \frac{6-8}{14} = \frac{-1}{7}$$

   Como $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{10-x^2}}$, entonces $f'(c) = \dfrac{-c}{\sqrt{100-c^2}}$ por lo que $f'(c) = \dfrac{-1}{7} = \dfrac{-c}{\sqrt{100-c^2}}$

   Resolviendo la ecuación se obtiene que $c = \sqrt{2}$ o $c = -\sqrt{2}$

   Aunque ambos valores de c pertenecen al intervalo $]-6,8[$, se tiene que $f'(x) = \dfrac{-1}{7}$ únicamente cuando $c = \sqrt{2}$.

   Luego en $P(\sqrt{2}, 7\sqrt{2})$ la recta tangente es paralela a la recta secante que pasa por los puntos $(-6,8)$ y $(8,6)$.

   Gráficamente se tiene:

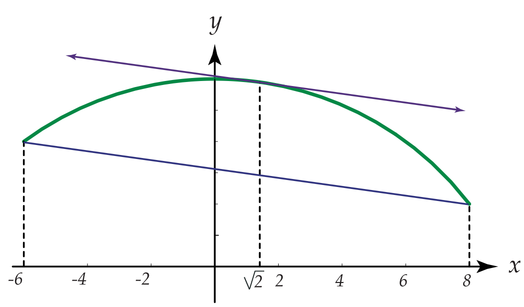


Figura 2.35: Gráfica de $f(x) = \sqrt{10-x^2}$

El análisis de las otras funciones queda como ejercicio para el estudiante.

2.1.18 Teorema de Gauchy del valor medio (o extensión del teorema del valor medio para derivadas)

■ **Teorema 1**

Sean f y g dos funciones continuas sobre un intervalo cerrado $[a,b]$ y derivables sobre el intervalo abierto $]a,b[$.

Si $g(b) \neq g(a)$ y $g'(x) \neq 0$ para $x \in]a,b[$, entonces existe un número $c \in]a,b[$ tal que $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Prueba: Al final del capítulo

Interpretación geométrica

Considere la representación gráfica de una curva $y = h(x)$, que tiene ecuaciones paramétricas $x = g(t)$, $y = f(t)$ donde $t \in [a,b]$.

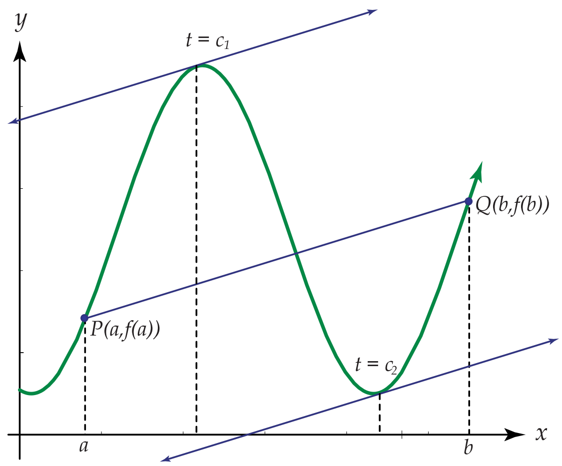


Figura 2.36: Interpretación geométrica del Teorema de Gauchy

Utilizando la derivación paramétrica se obtiene que la pendiente de la recta tangente a la curva en un determinado valor está dada por

$$D_x y = \frac{D_t f(t)}{D_t g(t)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

Además, la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $P(g(a), f(a))$, $Q(g(b), f(b))$ está dada por:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Por el teorema de Gauchy del valor intermedio, existe por lo menos un valor c en $]a,b[$ tal que: $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

En este caso, hay dos valores de t que satisfacen la conclusión del teorema y son $t = c_1$, $t = c_2$.

Ejemplo 1

En cada caso, determinar los valores $c \in]a,b[$ tales que satisfacen el teorema de Gauchy del valor medio.

1. $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$, $]a,b[=]0,2[$

2. $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$, $g(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, $]a,b[=]0,2[$

Solución:

1. Las funciones f y g son continuas y derivables en el intervalo $]0,2[$ por ser funciones polinomiales.

   Además: $g(2)=4$ y $g(0)=0$ por lo que $g(2)\neq g(0)$; $g'(x)=2x$, y $2x$ es diferente de cero para $x\in]0,2[$. Como se cumplen todas las condiciones existe c en $]0,2[$ tal que:

   $$\frac{f(2)-f(0)}{g(2)-g(0)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

   Como $f(2)=8$, $f(0)=0$, $f'(x)=3x^2$, y $g'(x)=2x$ entonces sustituyendo en la expresión anterior:

   $\dfrac{8-0}{4-0}=\dfrac{3c^2}{2c}$ de donde $2=\dfrac{3}{2}c$ y se obtiene que $c=\dfrac{4}{3}$.

2. Las funciones f y g son continuas y derivables en el intervalo $]0,2[$ pues ambas son el cociente de dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ donde $Q(x)=x^2+1$ es diferente de cero para x en $]0,2[$.

   Además: $g(2)=\dfrac{-3}{5}$ y $g(0)=1$ por lo que $g(2)\neq g(0)$; $g'(x)=\dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}$, es diferente de cero para $x\in]0,2[$. Como se cumplen todas las condiciones del teorema de Gauchy del valor medio, existe c en $]0,2[$ tal que:

   $$\frac{f(2)-f(0)}{g(2)-g(0)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

   Como $f(2)=\dfrac{4}{5}$, $f(0)=0$, $f'(x)=\dfrac{2-2x}{(1+x^2)^2}$, y $g'(x)=\dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}$ entonces sustituyendo en la igualdad anterior se tiene: $\dfrac{-4}{3}=\dfrac{2-2c^2}{-4c}$ y $10c^2=6$ por lo que $|c|=\sqrt{\dfrac{3}{5}}$.

   Como $c=-\sqrt{\dfrac{3}{5}}$ no pertenece al intervalo $]0,2[$, el valor que satisface la conclusión del teorema es $c=\sqrt{\dfrac{3}{5}}$, que sí pertenece al intervalo dado.

   El teorema de Gauchy del valor será utilizado en la demostración de algunos teoremas que se refieren a la regla de L'Hôpital y que serán estudiados en el próximo apartado.

2.1.19 Regla de L'Hôpital

Introducción

La regla de L'Hôpital es un método que se le atribuye al matemático francés Guillaume Francois de L'Hôpital (1661-1707). Este escribió el primer libro de cálculo conteniendo su método, junto con J. Bernoulli. Fue publicado en 1696.

Este método nos permite calcular ciertos límites que con los procedimientos estudiados anteriormente no era posible resolver. Así, al evaluar límites de la forma $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ en algunos casos se podía aplicar el teorema para el límite de un cociente:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)} \text{ siempre que } \lim_{x\to a}g(x)\neq 0$$

Aún cuando $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, a veces es posible determinar $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$. Por ejemplo el $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{x^2-x-2}$ que es de la forma $\frac{0}{0}$ puede escribirse como $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{(2x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{2x+1}{x-2} = \frac{5}{2}$

Sin embargo, existen límites como $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x-1)}{x-2}$ en los que tanto el numerador como el denominador tienden a cero cuando x tiende a 2, para los que no hemos dado ningún procedimiento que permita determinar su valor.

El siguiente teorema llamado Regla de L'Hôpital proporciona el instrumento adecuado para la evaluación de tal tipo de límites.

Regla de L'Hôpital

Teorema 1

Sean f y g funciones que satisfacen las condiciones del teorema de Gauchy en cierto intervalo $[a,b]$ y tales que $f(a) = g(a) = 0$.

Entonces, si $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe , también existirá $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ y además $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

También, si $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ entonces $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

Demostración Al final del capítulo.

Ejemplo 1

Calculemos el $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\operatorname{sen} x}$ utilizando el teorema anterior.

Observe que $e^0 - e^0 = 1 - 1 = 0$, $\operatorname{sen} 0 = 0$ por lo que se tiene la forma $\frac{0}{0}$.

Luego:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\operatorname{sen} x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}(-1)}{\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2$$

Nota: Si $f'(a) = 0$ y $g'(a) = 0$ y las derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$ satisfacen las condiciones que se especificaron para las funciones f y g, según la hipótesis de el teorema de la Regla de L'Hôpital, entonces puede aplicarse de nuevo la Regla de L'Hôpital, obteniéndose que:

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Puede operarse así sucesivamente siempre que se presente la forma $\frac{0}{0}$.

Ejemplo 2

Calculemos los límites siguientes:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - x}{x - \operatorname{sen} x}$

   Note que $\tan 0 - 0 = 0$, $0 - \operatorname{sen} 0 = 0$; se presenta la forma $\dfrac{0}{0}$ y puede aplicarse el teorema.

   Luego:

   $$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x - \operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sec^2\ x - 1}{1 - \cos x}$$

   aquí se presenta de nuevo la forma $\dfrac{0}{0}$ por lo que es posible aplicar otra vez el teorema.

   Entonces:

   $$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x - \operatorname{sen} x}$$

   $$= \lim_{x \to 0} \frac{\sec^2\ x - 1}{1 - \cos x}$$

   $$= \lim_{x \to 0} \frac{2sec\ x\ \tan x\ \sec x}{\operatorname{sen} x}$$

   $$= \lim_{x \to 0} \frac{2sec^2 x\ \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}$$

   $$= \lim_{x \to 0} \frac{2sec^2\ x}{\cos x} = \frac{2 \cdot 1}{1} = 2.$$

2. $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{e^y - 1 - y}{y^2}$ forma: $\dfrac{e^0 - 1 - 0}{0} = \dfrac{0}{0}$

   $$= \lim_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{2y} \quad \text{forma: } \frac{e^0 - 1}{2 \cdot 0} = \frac{0}{0}$$

   $$= \lim_{y \to 0} \frac{e^y}{2} = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}$$

3. $= \lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\theta - \operatorname{sen} \theta}{\tan^3 \theta}$ forma: $\dfrac{0 - \operatorname{sen} 0}{\tan^3\ 0} = \dfrac{0}{0}$

   $$= \lim_{\theta \to 0} \frac{1 - \cos \theta}{3 \tan^2 \theta\ \sec^2 \theta}$$

   $$= \lim_{\theta \to 0} \frac{1 - \cos \theta}{3 \cdot \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\cos^2 \theta} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta}}$$

   $$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\cos^4 \theta (1 - \cos \theta)}{3(1 - \cos^2 \theta)}$$

   $$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\cos^4 \theta}{3(1 + \cos \theta)} = \frac{1}{3(1+1)} = \frac{1}{6}.$$

Ejercicios:

Calcule los límites siguientes utilizando la Regla de L'Hôpital.

Antes de aplicarla asegúrese de tener la forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$.

1. $\displaystyle\lim_{y\to\pi^-} \frac{\operatorname{sen} y}{\sqrt{\pi - y}}$

2. $\displaystyle\lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{\sqrt{u}}$

3. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{(\pi - 2x)^2}$

4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$

Teorema 2

Sean f y g funciones derivables, (y por tanto continuas), en un intervalo $[h, +\infty[$, donde h es una constante positiva. Sea $g'(x) \neq 0$ para $x \in [h, +\infty[$.

Si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, y $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ y si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ entonces $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

Además, si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$ entonces $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

Prueba: Al final del capítulo

Este teorema nos permite aplicar la regla de L'Hôpital a límites en que se presenta la forma $\dfrac{0}{0}$, cuando la variable independiente tiende hacia $+\infty$. También puede aplicarse cuando $x \to infty$ y se tiene que $f(x) \to 0$, y $g(x) \to 0$.

Ejemplo 3

Calculemos los siguientes límites utilizando el teorema anterior.

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{2}{x}\right)}$

   Cuando $x \to +\infty$ se tiene que $\dfrac{1}{x^2} \to 0$, y $\dfrac{2}{x} \to 0$ por lo que $\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{2}{x}\right) \to 0$.

   Se presenta la forma $\dfrac{0}{0}$ y podemos aplicar el teorema anterior.

   Luego:

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{2}{x}\right)}$$

   $$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-2}{x^{-3}}}{2\ \operatorname{sen}\left(\frac{2}{x}\right)\cdot\ \cos\left(\frac{2}{x}\right)\cdot\frac{-2}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\operatorname{sen}\left(\frac{4}{x}\right)} \quad \text{forma } \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-1}{x^2}}{\cos\left(\frac{4}{x}\right)\cdot\frac{-4}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4\cos\left(\frac{4}{x}\right)} = \frac{1}{4\cos 0} = \frac{1}{4}.$$

2. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)} \quad \text{forma } \frac{\operatorname{sen} 0}{\arctan 0} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{-1}{x^2}}{\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2\cdot\frac{-1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{1}\cdot\left[1+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right] = 1.$$

3. $$\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2}{x}}{e^{\frac{1}{x}}-1} \quad \text{forma } \frac{0}{e^0-1} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{-2}{x^2}}{e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^{\frac{1}{x}}} = \frac{2}{e^0} = \frac{2}{1} = 2.$$

Aplicación de la Regla de L'Hôpital a otras formas indeterminadas

La Regla de L'Hôpital también se aplica en los casos en que un cociente presenta algunas de las formas siguientes:

$$\frac{+\infty}{+\infty},\ \frac{-\infty}{-\infty},\ \frac{+\infty}{-\infty},\ \frac{-\infty}{+\infty}$$

Daremos a continuación, sin demostración, los teoremas que permiten evaluar tal tipo de límites.

Teorema 3

Sean f y g funciones continuas y derivables para todos los valores en un intervalo abierto I, excepto cuando $x=a$, $(a\in I)$.

Si para $x\neq a$ se tiene que:

i. $g'(x)\neq 0$

ii. $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$

iii. $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$

iv. existe el $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k$

entonces también existe $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ y además $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k$.

Ejemplo 4

Calcular $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-}\dfrac{\ln(1-2x)}{\tan\pi\,x}$

Observe que:

a. $x \to \dfrac{1}{2}^- \Longrightarrow x < \dfrac{1}{2} \Longrightarrow 2x-1<0 \Longrightarrow 1-2x>0 \Longrightarrow 1-2x \to 0^+ \Longrightarrow \ln(1-2x) \to -\infty.$

b. $x \to \dfrac{1}{2}^- \Longrightarrow \pi x \to \dfrac{\pi^-}{2} \Longrightarrow \tan(\pi x) \to +\infty.$

Luego, se presenta la forma $\dfrac{-\infty}{+\infty}$ por lo que puede aplicarse el teorema anterior como sigue:

$$\lim_{x\to\frac{1^-}{2}}\frac{\ln(1-2x)}{\tan\pi\,x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{1^-}{2}}\frac{\frac{-2}{1-2x}}{\pi\ \sec^2\pi\,x}\quad (\text{Recuerde que } \sec^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta})$$

$$= \lim_{x\to\frac{1^-}{2}}\frac{-2\ \cos^2(\pi\,x)}{\pi\ (1-2x)}\quad \text{forma } \frac{-2\ \cos^2(\frac{\pi}{2})}{\pi(1-1)} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to\frac{1^-}{2}}\frac{4\ \pi(\cos\pi\,x)(\operatorname{sen}\pi\,x)}{-2\pi}$$

$$= \lim_{x\to\frac{1^-}{2}} -2\ (\cos\pi\,x)(\operatorname{sen}\pi\,x) = 0$$

$$\lim_{x\to\frac{1^-}{2}}\frac{\ln(1-2x)}{\tan\pi\,x} = 0$$

Teorema 4

Sean f y g funciones derivables para toda $x>h$, donde h es una constante positiva.

Además, para $x>h$ se cumple que $g'(x)\neq 0$ sí:

i $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad (\text{o} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty)$

ii $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \quad (\text{o} \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty)$

iii $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$

Entonces el $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ también existe y

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

El teorema también es válido cuando se sustituye $x\to+\infty$ por $x\to-\infty$

Además, si $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ entonces $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$

Ejemplo 5

Calcular los límites siguientes:

1. $\lim_{u \to +\infty} \dfrac{u}{e^{bu}}$ forma: $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ pues $e^{bu} \to +\infty$ cuando $u \to +\infty$ $(b > 0)$

   $= \lim_{u \to +\infty} \dfrac{1}{be^{bu}} = 0$

2. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^{2x} - e^{-x}}$

   Este límite puede escribirse también como:

   $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x} + 1}{e^{3x} - 1}$ que presenta la forma $\dfrac{+\infty}{+\infty}$

   luego:

   $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^{2x} - e^{-x}} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x} + 1}{e^{3x} - 1}$

   $= \lim_{x \to +\infty} \dfrac{2e^{2x}}{3e^{3x}}$

   $= \lim_{x \to +\infty} \dfrac{2}{3e^x} = 0$

Límites que presentan la forma "$0 \cdot \infty$"

Si $= \lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$ entonces el $= \lim_{x \to a} [f(x)\ g(x)]$ puede designarse por la forma $0 \cdot \infty$ que no coincide con ninguna de las expresiones en las que es posible aplicar la Regla de L'Hôpital.

Sin embargo, es posible hacer transformaciones algebráicas de manera que se obtengan las formas $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$, como sigue:

1. $= \lim_{x \to a} [f(x)\ g(x)] = \dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ y se tiene $\dfrac{\infty}{\infty}$ cuando $x \to a$

2. $= \lim_{x \to a} [f(x)\ g(x)] = \dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ y se tiene $\dfrac{0}{0}$ cuando $x \to a$

En estos dos casos sí es posible aplicar los teoremas de la Regla de L'Hôpital.

Ejemplo 6

Calcular los límites siguientes:

1. $= \lim_{x \to 0^+} [2x \ \ln \ x]$

   Como $x \to 0^+$ entonces $2x \to 0^+$ y $\ln \ x \to -\infty$

   Pero $2x \ \ln \ x$ puede escribirse como $\dfrac{\ln(x)}{\frac{1}{2x}}$ que presenta la forma $\dfrac{-\infty}{+\infty}$ lo que nos permite aplicar la Regla de L'Hôpital como sigue:

   $$= \lim_{x \to 0^+} [2x \ \ln \ x] = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{2x}}$$

   $$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{2x^2}}$$

   $$= \lim_{x \to 0^+} -2x = 0$$

2. $\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sen} x \ \ln \ x$

   Note que si $x \to 0^+$ entonces $\operatorname{sen} x \to 0^+$ y $\ln \ x \to -\infty$ pero $\operatorname{sen} x \ \ln \ x$ puede escribirse como:

   $\dfrac{\ln \ x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = \dfrac{\ln \ x}{\csc x}$ que presenta la forma $\dfrac{-\infty}{+\infty}$ cuando $x \to 0^+$.

   Luego:

   $$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sen} x \ \ln \ x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln \ x}{\csc x}$$

   $$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc x \ \cot x}$$

   $$= \lim_{x \to 0^+} \frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x \ \cos x}$$

   $$= \lim_{x \to 0^+} \frac{-1}{\cos x} \cdot \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} \quad \text{forma } \frac{0}{0}$$

   $$= \frac{-1}{1} \cdot \lim_{x \to 0^+} \frac{2 \operatorname{sen} \ x \ \cos x}{1} = -1 \cdot 0 = 0$$

   Por tanto: $\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sen} x \ \ln \ x = 0$

3. $\lim_{x \to 1^-} (1 - x) \ \tan \left(\dfrac{\pi \ x}{2} \right)$

   Este límite vuelve a presentar la forma forma $0 \cdot \infty$, sin embargo, la expresión $(1 - x) \ \tan \left(\dfrac{\pi \ x}{2} \right)$ puede también escribirse como:

   $\dfrac{(1 - x) \ \operatorname{sen} \left(\frac{\pi \ x}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\pi \ x}{2} \right)}$ que presenta la forma $\dfrac{0}{0}$, cuando $x \to 1^-$.

   Luego, calculamos el límite como sigue:

   $$\lim_{x \to 1^-} (1 - x) \ \tan \left(\frac{\pi \ x}{2} \right)$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{(1-x)\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi\, x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi\, x}{2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cdot \lim_{x \to 1^-} \frac{(1-x)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$

$$= 1 \cdot \lim_{x \to 1^-} \frac{-1}{\frac{-\pi}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = \frac{2}{\pi}$$

Otras formas indeterminadas

Si en el $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^{g(x)}$ se tiene que:

1. $= \lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ y $= \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$

   ó

2. $= \lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ y $= \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$

   ó

3. $= \lim\limits_{x \to a} f(x) = 1$ y $= \lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$

entonces dicho límite presenta las formas 0^0, ∞^0, y 1^∞ respectivamente.

Para calcular este tipo de límites se sigue el siguiente procedimiento:

Consideremos la igualdad $y = [f(x)]^{g(x)}$, tomando logaritmo natural a ambos lados de ella se tiene: $\ln\ y = g(x)[\ln\ f(x)]$. Note que en la expresión $g(x)[\ln\ f(x)]$ presenta en todos los casos la forma $0 \cdot \infty$.

Los límites en que se presenta esta forma indeterminada fueron estudiados anteriormente.

Tenemos entonces que:

$$\lim_{x \to a} \ln\ y = \lim_{x \to a} g(x)[\ln\ f(x)]$$

Como la función logaritmo es continua podemos escribir:

$$\ln[\lim_{x \to a} y] = \lim_{x \to a} [g(x)\ln[f(x)]]$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to a} y = e^{\lim\limits_{x \to a} g(x)[\ln f(x)]}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x \to a} g(x)[\ln f(x)]}$$

Ejemplo 7

Utilizando el procedimiento descrito anteriormente, calculemos los siguientes límites:

1. $\lim_{x\to 1^+} x^{\frac{1}{x-1}}$

   Si $x \to 1^+$ entonces $\dfrac{1}{x-1} \to +\infty$ por lo que se tiene la forma $(1)^{+\infty}$

   Luego:

   $$\lim_{x\to 1^+} x^{\frac{1}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1}\cdot \ln x}$$

   $$= e^{\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\ln\ x}{x-1}}$$

   Note que el $= \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\ln x}{x-1}$ presenta la forma $\dfrac{0}{0}$ por lo que puede aplicarse la Regla de L'Hôpital.

   Entonces:

   $$\lim_{x\to 1^+} x^{\frac{1}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\ln\ x}{x-1}}$$

   $$= e^{\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x}}{1}}$$

   $$= e^{\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{x}} = e^1 = e$$

2. $\lim_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$

   Si $x \to 0^+$ entonces $\dfrac{1}{x} \to +\infty$ y, $\tan x \to 0$ por lo que se tiene la forma $(+\infty)^0$.

   Luego:

   $$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \left[\tan x\ \ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]}$$

   Note que $\lim\limits_{x\to 0^+} \left[\tan x\ \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]$ presenta la forma $0\cdot +\infty$. Este último límite puede escribirse como: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{\tan x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\cot x}$ que es ahora de la forma $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ y al cual puede aplicarse la Regla de L'Hôpital.

   Entonces:

   $$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \left[\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\cot x}\right]}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{\frac{-1}{x^2}\cdot x}{-\csc^2 x}\right]}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}} \quad \text{forma } \frac{0}{0}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2\operatorname{sen} x\cos x}{1}} = e^0 = 1$$

Por tanto:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x} = 1$$

3. $\lim\limits_{x\to 0^+}(x)^{\operatorname{sen} x}$

Se presenta la forma $(0^+)^{0^+}$ por lo que:

$$\lim_{x\to 0^+}(x)^{\operatorname{sen} x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}(\operatorname{sen} x\ln x)}$$

El $\lim\limits_{x\to 0^+}[\operatorname{sen} x\ln x]$ es de la forma $0\cdot(-\infty)$, que puede escribirse como $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\csc x}$, que es ahora de la forma $\dfrac{-\infty}{+\infty}$, y podemos por tanto aplicar la Regla de L'Hôpital.

Luego:

$$\lim_{x\to 0^+}(x)^{\operatorname{sen} x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\csc x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\csc x\cot x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x\cos x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-1}{\cos x}\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}}$$

$$= e^{-1\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2\operatorname{sen} x\cos x}{1}} = e^{-1\cdot 0} = e^0 = 1$$

4. $\lim\limits_{u\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{sen} u}{u}\right)^{u^{-2}}$

Si $u\to 0$ entonces $\dfrac{\operatorname{sen} u}{u}\to 1$ y $u^{-2} = \dfrac{1}{u^2}\to +\infty$ por lo que $\lim\limits_{u\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{sen} u}{u}\right)^{u^{-2}}$ es de la forma $(1)^{+\infty}$

Luego:

$$\lim_{u\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} u}{u}\right)^{u^{-2}} = e^{\lim\limits_{u\to 0}\left[u^{-2}\ln\left(\frac{\operatorname{sen} u}{u}\right)\right]}$$

el $\lim\limits_{u\to 0}\left[u^{-2}\ln\left(\frac{\operatorname{sen} u}{u}\right)\right]$ es de la forma $0\cdot +\infty$ y puede escribirse como $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\operatorname{sen} u}{u}\right)}{u^2}$ al cual puede aplicarse la Regla de L'Hôpital pues es de la forma $\frac{0}{0}$.

Entonces:

$$\lim_{u\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} u}{u}\right)^{u^{-2}} = e^{\lim\limits_{u\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\operatorname{sen} u}{u}\right)}{u^2}}$$

$$= e^{\lim\limits_{u\to 0}\left[\frac{\frac{u}{\operatorname{sen} u}\cdot\frac{u\cos u-\operatorname{sen} u}{u^2}}{2u}\right]}$$

$$= e^{\lim\limits_{u\to 0}\frac{u\cos u-\operatorname{sen} u}{2u^2\operatorname{sen} u}} \quad \text{forma } \frac{0}{0}$$

$$= e^{\lim\limits_{u\to 0}\frac{\cos u - u\operatorname{sen} u-\cos u}{4u\operatorname{sen} u+2u^2\cos u}}$$

$$= e^{\lim\limits_{u\to 0}\frac{-u\operatorname{sen} u}{4u\operatorname{sen} u+2u^2\cos u}}$$

$$= e^{\lim\limits_{u\to 0}\frac{-\operatorname{sen} u}{4\operatorname{sen} u+2u^2\cos u}} \quad \text{forma } \frac{0}{0}$$

$$= e^{\lim\limits_{u\to 0}\frac{-\cos u}{4\cos u+2\cos u-2u\operatorname{sen} u}} = e^{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt[6]{e}}$$

Luego:

$$\lim_{u\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} u}{u}\right)^{u^{-2}} = \frac{1}{\sqrt[6]{e}}$$

Otra forma indeterminada

En algunos límites se presenta la forma $(+\infty)-(+\infty)$ de la cual no se puede dar un resultado inmediato. Sin embargo, mediante algunas transformaciones algebráicas es posible obtener la forma $\frac{0}{0}$ y aplicar luego la Regla de L'Hôpital.

■ **Ejemplo 8**

1. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

Consideramos dos casos:

a. Si $x \to 1^+$ entonces $x > 1$ y $x^2 > 1$ por lo que $x-1 \to 0^+$ y $x^2-1 \to 0^+$ de donde $\dfrac{2}{x^2-1} \to +\infty$ y $\dfrac{1}{x-1} \to +\infty$

Luego $\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right) \to (+\infty)-(+\infty)$ cuando $x \to 1^+$

b. Si $x \to 1^-$ entonces $x < 1$ y $x^2 < 1$ por lo que $x-1 \to 0^+$ y $x^2-1 \to 0^-$ de donde $\dfrac{2}{x^2-1} \to -\infty$ y $\dfrac{1}{x-1} \to +\infty$

Luego $\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right) \to (+\infty)-(+\infty)$ cuando $x \to 1^-$

Note que en ambos casos se tiene $(+\infty)-(+\infty)$

Resolvemos el límite de la siguiente manera:

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right]=\lim_{x\to 1}\left[\frac{2}{(x-1)(x+1)}-\frac{1}{x-1}\right]$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2-(x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{x^2-1} \text{ forma } \frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{2x}=\frac{-1}{2}$$

2. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$

Consideramos los siguientes casos:

a. Si $x \to \dfrac{\pi^+}{2}$ entonces $\cos x \to 0^-$ por lo que $\sec x = \dfrac{1}{\cos x} \to -\infty$ y $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \to -\infty$

Luego $(\sec x-\tan x) \to (-\infty)-(-\infty)$ cuando $x \to \dfrac{\pi^+}{2}$

b. Si $x \to \dfrac{\pi^-}{2}$ entonces $\cos x \to 0^+$ por lo que $\sec x \to +\infty$ y $\tan x \to +\infty$

Luego $(\sec x-\tan x) \to (+\infty)-(+\infty)$ cuando $x \to \dfrac{\pi^-}{2}$

Note que en ambos casos se tiene $(+\infty)-(+\infty)$

Procedemos como sigue para determinar el valor del límite:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x} \text{ forma } \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\operatorname{sen} x} = \frac{0}{1} = 0$$

3. $\lim_{x\to+\infty} \left(x^3 - 2e^{3x}\right)$

Si $x \to +\infty$ entonces $x^3 \to +\infty$ y $e^{3x} \to +\infty$ tenemos que aparece la forma $(+\infty) - (+\infty)$

Para este tipo de límite se factoriza algunos de los sumandos de la manera siguiente:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x^3 - 2e^{3x}\right) = \lim_{x\to+\infty} x^3 \left[1 - \frac{2e^{3x}}{x^3}\right]$$

Calculemos ahora: $\lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{3x}}{x^3}$ que presenta la forma $\frac{+\infty}{+\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{3x}}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6e^{3x}}{3x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6e^{3x}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{9e^{3x}}{1} = +\infty$$

Luego: $\lim_{x\to+\infty} x^3 \left(1 - \frac{2e^{3x}}{x^3}\right) = (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$

4. $\lim_{x\to 0^+} \left(e^{\frac{1}{x}} + \ln x\right)$

Si $x \to 0^+$ entonces $\frac{1}{x} \to +\infty$, $e^{\frac{1}{x}} \to +\infty$ $\ln\ x \to -\infty$ de nuevo aparece $+\infty - \infty$

Factorizamos:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(e^{\frac{1}{x}} + \ln\ x\right) = \lim_{x\to 0^+} e^{x} \left[1 + \frac{\ln\ x}{e^{\frac{1}{x}}}\right]$$

Calculemos $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{e^{\frac{1}{x}}}$ que presenta la forma $\frac{-\infty}{+\infty}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x}} = 0$$

Luego: $\lim_{x\to 0^+} \left(e^{\frac{1}{x}} + \ln x\right) = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right) = +\infty$