Teorema de Leibniz – Cramer

Sea el sistema crameriano **AX = B** con $A \in M^{nxn}$; $X \in M^{nx1}$; $B \in M^{nx1}$ entonces:

a) El sistema lineal A X = B admite solución única.

b) El valor de la i-ésima componente del vector solución X, se obtiene como el cociente de dos números $\mathbf{x_i} = \dfrac{|A_i|}{|A|}$, i = 1, 2, ..., n donde $A_i \in M^{nxn}$ es la matriz que se obtiene al reemplazar en la matriz de los coeficientes la columna i-ésima por la columna de los términos independientes.

$$x_1 = \frac{\mathbf{1}}{|\mathbf{A}|} \begin{vmatrix} \mathbf{b_1} & \mathbf{a_{12}} & \cdots & \mathbf{a_{1n}} \\ \mathbf{b_2} & \mathbf{a_{22}} & \cdots & \mathbf{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{b_n} & \mathbf{a_{n2}} & \cdots & \mathbf{a_{nn}} \end{vmatrix},$$

$$x_2 = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{b_1} & \dots & \mathbf{a_{1n}} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{b_2} & \dots & \mathbf{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a_{n1}} & \mathbf{b_n} & \dots & \mathbf{a_{nn}} \end{vmatrix}$$

$$\dots\dots\dots\dots x_n = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \dots & \mathbf{b_1} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \dots & \mathbf{b_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a_{n1}} & \mathbf{a_{n2}} & \dots & \mathbf{b_n} \end{vmatrix}$$

Demostración del apartado a)

Sea A X = B, como el sistema es crameriano, $|A| \neq 0$ $\Rightarrow$ $\exists$ A^{-1} y es única.Premultiplicando ambos miembros por la inversa de A:

$$A^{-1}(A\,X) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)\,X = A^{-1}B \Rightarrow I\,X = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

$X = A^{-1} B$ es la única solución del sistema por ser A^{-1} única.

Observación $\mathbf{X = A^{-1} B}$

Método para resolver sistemas cuadrados utilizando matriz inversa.

Observación El Teorema nos brinda la **Regla de Cramer**

Ejemplos:

a) Resuelva el siguiente sistema lineal utilizando matriz inversa: $\begin{cases} \mathbf{x - 4y = 2} \\ \mathbf{x - 3y = 1} \end{cases}$