1 LA INTEGRAL INDEFINIDA

Objetivo:
Se pretende que el estudiante encuentre algebraicamente antiderivadas

En la antigüedad existían dos problemas a resolver, el de la recta tangente y el área bajo una curva. El problema de la determinación de la ecuación de la recta tangente fue resuelto con la derivada y ya fue tratado en cálculo diferencial. El problema del cálculo del área bajo una curva se lo resuelve con las nociones del cálculo integral los cuales expondremos en este curso. Sin embargo empezaremos en este capítulo hallando antiderivadas y en el siguiente capítulo utilizaremos antiderivadas para el propósito del cálculo integral.

1.1 DEFINICIÓN DE ANTIDERIVADA O INTEGRAL INDEFINIDA

Llamamos a F una antiderivada, primitiva o integral indefinida de f en el intervalo I, si $D_x F(x) = f(x)$ es decir $F'(x) = f(x)$

1.1.1 Notación

La notación que emplearemos para referirnos a una antiderivada es la siguiente:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

1.1.2 Teorema

Si $F'(x) = G'(x)$, $\forall x \in (a,b)$ entonces existe una constante C tal que $F(x) = G(x) + C$, $\forall x \in (a,b)$

Demostración:

Sea $H(x) = F(x) - G(x)$ definida en un intervalo (a,b) entonces $H'(x) = F'(x) - G'(x)$. Por Hipótesis, como $F'(x) = G'(x)$ entonces $H'(x) = 0$, $\forall x \in (a,b)$.

Como H es derivable $\forall x \in (a,b)$, entonces de acuerdo el teorema del valor medio para derivada, $\exists x_0 \in (x, x_1) \subseteq (a,b)$ tal que $H'(x_0) = \dfrac{H(x_1) - H(x)}{x_1 - x}$. Haciendo $H'(x_0) = 0$ tenemos $\dfrac{H(x_1) - H(x)}{x_1 - x} = 0$ es decir $H(x) = H(x_1) = C$.

Por lo tanto $F(x) - G(x) = C$

1.2 INTEGRACIÓN.

Integración significa calcular antiderivadas o primitivas, el proceso contrario de la derivación, como ya se habrá notado. Esto no es tan sencillo y requeriremos de técnicas, las cuales presentaremos a continuación.

En primera instancia, es importante pensar que siempre se va a poder determinar la antiderivada empleando fórmulas, igual como se lo hacia en el calculo de derivadas.

1.2.1 Formas (Fórmulas) Estándares de Integrales

1. $\int dx = x + C$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \;\; ; \;\; n \neq -1$
3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
4. $\int e^x dx = e^x + C$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$
7. $\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$
8. $\int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x + C$
9. $\int \csc^2 x dx = -\cot gx + C$
10. $\int \sec x \operatorname{tg} x dx = \sec x + C$
11. $\int \csc x \cot gdx = -\csc x + C$
12. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C = \ln|\sec x| + C$
13. $\int \cot gx dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C$
14. $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$
15. $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot gx| + C$
16. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + C$
17. $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C$
18. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arcsen}\left(\frac{|x|}{a}\right) + C = \frac{1}{a} \arccos\left(\frac{a}{|x|}\right) + C$
19. $\int \operatorname{senh} x dx = \cosh x + C$
20. $\int \cosh x dx = \operatorname{senh} x + C$

Las primeras 11 fórmulas se las puede entender fácilmente de acuerdo a las formulas que se proporcionaron para derivadas.

Ejemplo 1

Calcular $\int x^2 dx$

SOLUCIÓN:
Sería cuestión de emplear la formula 2.

$$\int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = \frac{x^3}{3} + C$$

Ejemplo 2

Calcular $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

SOLUCIÓN:
Sería cuestión de emplear la formula 2.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-1/2} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C$$

Ejemplo 3

Calcular $\int \frac{1}{4+x^2} dx$

SOLUCIÓN:
Sería cuestión de emplear la formula 17.

$$\int \frac{1}{2^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

Para suma, resta de funciones y multiplicación por escalares hacemos uso de las siguientes propiedades.

1.2.2 PROPIEDADES.

La Integral Indefinida cumple con propiedades de linealidad, es decir:

1. $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
2. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx; \quad k \in R$

Ejemplo 4

Calcular $\int\left(\frac{2}{x}+3\sin x-4e^{x}\right)dx$

SOLUCIÓN:

Aplicando propiedades y fórmulas:

$$\begin{aligned}\int\left(\frac{2}{x}+3\sin x-4e^{x}\right)dx &= \int\frac{2}{x}dx+\int 3\sin dx-\int 4e^{x}dx\\ &= 2\int\frac{1}{x}dx+3\int\sin xdx-4\int e^{x}dx\\ &= 2\ln x-3\cos x-4e^{x}+C\end{aligned}$$

Para situaciones un tanto más complejas se requerirá de técnicas para lograr el objetivo.

1.2.3 TECNICAS DE INTEGRACIÓN

1.2.3.1 INTEGRACIÓN DIRECTA.

Puede ser que, haciendo uso de recursos algebraicos, de las propiedades y de las formulas se puedan encontrar antiderivadas.

Ejemplo 1

Calcular $\int\frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}dx$

SOLUCIÓN:

Elevando al cubo el binomio y luego simplificando para aplicar propiedades, resulta:

$$\begin{aligned}\int\frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}dx &= \int\frac{1-3x+3x^2-x^3}{x^{4/3}}dx\\ &= \int\left[\frac{1}{x^{4/3}}-\frac{3x}{x^{4/3}}+\frac{3x^2}{x^{4/3}}-\frac{x^3}{x^{4/3}}\right]dx\\ &= \int\left[x^{-4/3}-3x^{-1/3}+3x^{2/3}-x^{5/3}\right]dx\\ &= \int x^{-4/3}dx-3\int x^{-1/3}dx+3\int x^{2/3}dx-\int x^{5/3}dx\\ &= \frac{x^{-1/3}}{-1/3}-3\frac{x^{2/3}}{2/3}+3\frac{x^{5/3}}{5/3}-\frac{x^{8/3}}{8/3}+C\\ &= -3x^{-1/3}-\frac{9}{2}x^{2/3}+\frac{9}{5}x^{5/3}-\frac{3}{8}x^{8/3}+C\end{aligned}$$

Ejercicios Propuestos 1.1

Encuentre las antiderivadas de:

1. $\int \left(3-x^2\right)^3 dx$	4. $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x} dx$
2. $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\; dx$	5. $\int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3} dx$
3. $\int \frac{\left(x^2+1\right)\left(x^2-2\right)}{\sqrt[3]{x^2}} dx$	

1.2.3.2 INTERGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN O CAMBIO DE VARIABLE

Cuando se presentan funciones compuestas, en las que ya no es posible una integración directa, puede ser que con un cambio de variable se transformen en integrales inmediatas.

En este caso las formulas de integrales se las puede observar no sólo para "x" sino para otra variable.

Ejemplo 1

Calcular $\int (1-x)^{30}\, dx$

SOLUCIÓN:

No sería práctico obtener el desarrollo del binomio, porque el exponente es 30. Entonces, sería más conveniente si empleamos el cambio de variable $t=1-x$.

Del cambio de variable, tenemos: $\frac{dt}{dx}=-1dx \rightarrow dx=-dt$.

Ahora sustituyendo resulta: $\int t^{30}(-dt)=-\int t^{30}dt=-\frac{t^{31}}{31}+C$

Una vez integrado, reemplazando t se obtiene: $\int (1-x)^{30}dx=-\frac{(1-x)^{31}}{31}+C$

Ejemplo 2

Calcular $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

SOLUCIÓN:

Aquí empleamos el cambio de variable: $t=\sqrt{x}$.

Del cambio de variable se obtiene: $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow dx=2\sqrt{x}dt$.

Sustituyendo resulta: $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=\int \frac{\operatorname{sen}t}{\sqrt{x}}2\sqrt{x}dt=2\int \operatorname{sen}t\,dt=2(-\cos t)+C$

Una vez integrado, reemplazando " t " tenemos: $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = -2\cos\sqrt{x} + C$

Ejemplo 3

Calcular $\int x\sqrt{x-1}dx$

SOLUCIÓN:
Aquí empleamos el cambio de variable: $t = x-1$

Del cambio de variable se obtiene: $\frac{dt}{dx} = 1 \rightarrow dx = dt$

Sustituyendo resulta: $\int x\sqrt{x-1}dx = \int x\sqrt{t}dt$

Como no se simplifica la x, debemos reemplazarla.

En este caso, despejando del cambio de variable: $x = t+1$

Entonces: $\int x\sqrt{t}dt = \int (t+1)\sqrt{t}dt = \int \left(t\sqrt{t} + \sqrt{t}\right)dt = \int t^{3/2}dt + \int t^{1/2}dt$

$= \frac{2}{5}t^{5/2} + \frac{2}{3}t^{3/2} + C$

Una vez integrado, reemplazando t resulta:

$$\int x\sqrt{x-1}dx = \frac{2}{5}(x-1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + C$$

Ejemplo 4

Calcular $\int \left(\frac{4x - 1 + arc\ tan\ x - e^{arc\ tan\ x}}{x^2+1}\right)dx$

SOLUCIÓN:
Separando las integrales, tenemos:

$$\int \frac{4x}{x^2+1}dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx + \int \frac{arctanx}{x^2+1}dx - \int \frac{e^{arc\ tan\ x}}{x^2+1}dx$$

Ahora tenemos 4 integrales, que se las trata por separado.

1. $\int \frac{4x}{x^2+1}dx$. Esta integral se la resuelve por cambio de variable $t = x^2+1$, de donde $\frac{dt}{dx} = 2x$, entonces $dx = \frac{dt}{2x}$.

   Sustituyendo, resulta: $\int \frac{4x}{x^2+1}dx = \int \frac{4x}{t}\frac{dt}{2x} = 2\int \frac{1}{t}dt = 2\ln|t| + C = 2\ln\left|x^2+1\right| + C$

2. $\int \frac{1}{x^2+1}dx$. Esta integral es directa. $\int \frac{1}{x^2+1}dx = arctanx + C$

3. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}dx$. Esta integral se la resuelve por cambio de variable $t = \operatorname{arctg} x$, de donde $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x^2+1}$, entonces $dx = \left(x^2+1\right)dt$.

Sustituyendo, resulta:

$$\int \frac{arctanx}{x^2+1}dx = \int \frac{t}{x^2+1}\left(x^2+1\right)dt = \int tdt = \frac{t^2}{2}+C = \frac{(arctanx)^2}{2}+C$$

4. $\int \frac{e^{arc\ \mathrm{tg}\ x}}{x^2+1}dx$. Para esta integral sirve el mismo cambio de variable, por tanto:

$$\int \frac{e^{arc\ tan\ x}}{x^2+1}dx = \int \frac{e^t}{x^2+1}\left(x^2+1\right)dt = \int e^t dt = e^t + C = e^{arctanx} + C$$

FINALMENTE:

$$\int \left(\frac{4x-1+arc\ tan\ x - e^{arc\ tan\ x}}{x^2+1} \right) dx = 2\ln\left|x^2+1\right| - arc\ tan\ x + \frac{(arc\ tan\ x)^2}{2} - e^{arc\ tan\ x} + C$$

Ejemplo 5

Calcular $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}}$

SOLUCIÓN:

Tomando el cambio de variable: $t = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

Del cambio de variable:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}2x\right)$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \rightarrow dx = \sqrt{1+x^2}\,dt$$

Reemplazando, resulta:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}} = \int \frac{\sqrt{1+x^2}\,dt}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{t}}$$

$$= \int t^{-1/2}dt = 2t^{1/2} + C$$

$$= 2\sqrt{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)} + C$$

Ejercicios Propuestos 1.2

Calcular:

1. $\int \frac{dx}{(5x-2)^{5/2}}$	11. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$
2. $\int x\sqrt{2x-1}\,dx$	12. $\int \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$
3. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}$	13. $\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}$
4. $\int \sqrt{1-\operatorname{sen}(2x)}\,dx$	14. $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx$
5. $\int \frac{x^2+1}{x-1}dx$	15. $\int \frac{\operatorname{sen}x\cos x}{\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2x+b^2\cos^2x}}\,dx$
6. $\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2}\,dx$	16. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2x\ \sqrt[4]{c\operatorname{tg}x}}$
7. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$	17. $\int \sqrt{\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{1+x^2}}\,dx$
8. $\int \frac{arc\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx$	18. $\int \frac{2^x3^x}{9^x-4^x}\,dx$
9. $\int \frac{1}{1-x^2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx$	19. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$	20. $\int \frac{x-1}{\sqrt{4x^2-8x+3}}dx$

1.2.3.3 INTEGRACION POR PARTES.

Para el producto de funciones, tenemos: $d(uv)=udv+vdu$

Despejando y tomando integral, resulta:

$$\boxed{\begin{aligned} udv &= d(uv)-vdu \\ \int udv &= \int d(uv)-\int vdu \end{aligned}}$$

En definitiva, la formula que se emplea en integración por partes es:

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

Ejemplo 1

Calcular $\int x\,e^x\,dx$

SOLUCIÓN:

Haciendo $u=x$ y $dv=e^x dx$.

Entonces $du = dx$ y $v = \int e^x dx = e^x$

Integrando, resulta: $\int \overbrace{x}^{u} \overbrace{e^x\, dx}^{dv} = \overbrace{x}^{u}\,\overbrace{e^x}^{v} - \int \overbrace{e^x}^{v}\,\overbrace{dx}^{du}$

$$= x e^x - e^x + C$$

Ejemplo 2

Calcular $\int \left(2x^2 + 3x - 5\right)\operatorname{sen} x\, dx$

SOLUCIÓN:

Haciendo $u = 2x^2 + 3x - 5$ y $dv = \operatorname{sen} x\, dx$.

Entonces $du = (4x + 3)dx$ y $v = \int \operatorname{sen} x dx = -\cos x$

Por lo tanto, integrando tenemos:

$$\int \overbrace{\left(2x^2 + 3x - 5\right)}^{u}\overbrace{\operatorname{sen} x\, dx}^{dv} = \overbrace{\left(2x^2 + 3x - 5\right)}^{u}\overbrace{\left(-\cos x\right)}^{v} - \int \overbrace{\left(-\cos x\right)}^{v}\overbrace{(4x + 3)dx}^{du}$$

$$= -\left(2x^2 + 3x - 5\right)\cos x + \int (4x + 3)\cos x dx$$

Ahora, la integral $\int (4x+3)\cos x dx$ también se la realiza por partes.

Haciendo $u = 4x + 3$ y $dv = \cos x\, dx$. Entonces $du = 4dx$ y $v = \int \cos x dx = \operatorname{sen} x$

Por tanto: $\int (4x+3)\cos x dx = (4x+3)\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x(4dx)$

$$= (4x+3)\operatorname{sen} x + 4\cos x$$

FINALMENTE:

$$\int \left(2x^2 + 3x - 5\right)\operatorname{sen} x\, dx = -\left(2x^2 + 3x - 5\right)\cos x + (4x + 3)\operatorname{sen} x + 4\cos x + C$$

Ejemplo 3

Calcular $\int e^x \cos x dx$

SOLUCIÓN:

Haciendo $u = e^x$ y $dv = \cos x\, dx$.

Entonces $du = e^x dx$ y $v = \int \cos x dx = \operatorname{sen} x$

Por tanto: $\int e^x \cos x dx = e^x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \, e^x dx$

La integral $\int \operatorname{sen} x e^x dx$ se la calcula por parte. Hacemos $u = e^x$ y $dv = \operatorname{sen} x \, dx$.

Entonces $du = e^x dx$ y $v = \int \operatorname{sen} x dx = -\cos x$.

Por lo tanto $\int e^x \operatorname{sen} x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$

FINALMENTE:

$$\int e^x \cos x dx = e^x \operatorname{sen} x - \left[-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx \right]$$

$$\int e^x \cos x dx = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$$

Note que la última integral es semejante a la primera; entonces, despejando

$$2\int e^x \cos x dx = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x}{2} + C$$

Ejemplo 4

Calcular $\int x \ln x dx$

SOLUCIÓN:

Aquí debemos tomar $u = \ln x$ y $dv = x \, dx$.(¿por qué?)

Entonces $du = \frac{1}{x} dx$ y $v = \int x dx = \frac{x^2}{2}$

Por tanto:

$$\int x \ln x dx = (\ln x)\left(\frac{x^2}{2}\right) - \int \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{x} dx\right)$$

$$= \tfrac{1}{2} x^2 \ln x - \tfrac{1}{2}\int x dx$$

$$= \tfrac{1}{2} x^2 \ln x - \tfrac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right) + C$$

Ejemplo 5

Calcular $\int \ln x dx$

SOLUCIÓN:

Entonces, aquí sería también $u=\ln x$ y $dv=dx$. Entonces $du=\frac{1}{x}dx$ y $v=\int dx=x$

Por tanto:

$$\begin{aligned}\int \ln x dx &= x\ln x-\int x\left(\frac{1}{x}dx\right)\\ &= x\ln x - x + C\end{aligned}$$

Ejemplo 6

Calcular $\int x \operatorname{arctg} x\, dx$

SOLUCIÓN:

Tomamos $u=\operatorname{arctg} x$ y $dv=xdx$, entonces: $du=\frac{1}{1+x^2}dx$ y $v=\frac{x^2}{2}$

Por tanto:

$$\begin{aligned}\int x\operatorname{arctg} x dx &= (\operatorname{arctg} x)\left(\frac{x^2}{2}\right)-\int \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{1+x^2}dx\right)\\ &= \tfrac{1}{2}x^2\operatorname{arctg} x-\tfrac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2+1}dx\end{aligned}$$

Para la última integral dividimos el numerador entre el denominador, resulta: $\frac{x^2}{x^2+1}=1-\frac{1}{x^2+1}$

Reemplazando $\int \frac{x^2}{x^2+1}dx=\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\int dx-\int\frac{1}{x^2+1}dx=x-\operatorname{arctg} x$

FINALMENTE: $\int x\operatorname{arctg} x dx=\tfrac{1}{2}x^2\operatorname{arctg} x-\tfrac{1}{2}\left[x-\operatorname{arctg} x\right]+C$

Ejercicios Propuestos 1.3

Encuentre las antiderivadas de:

1. $\int x\, e^{3x}\, dx$	11. $\int x(\operatorname{arctg} x)^2 dx$
2. $\int (x+1)e^{2x}dx$	12. $\int e^{\sqrt{x}}\, dx$
3. $\int (2x-1)\operatorname{sen} 3x dx$	13. $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$
4. $\int x\operatorname{sen}(3x-1)dx$	14. $\int \arcsin x\, dx$
5. $\int x^2\, e^{-2x}\, dx$	15. $\int \operatorname{arctg} x dx$
6. $\int \left(x^2-3x+2\right)e^{2x}\, dx$	16. $\int arc\ tan\left(\sqrt{x}\right)dx$
7. $\int (2x-1)\ln x dx$	17. $\int \cos\,(\ln x)\, dx$

8. $\int \sqrt{x}\,\ln^2 x\, dx$	18. $\int \operatorname{sen}\sqrt{x}\, dx$
9. $\int \sqrt{x}\,\ln x\, dx$	19. $\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx$
10. $\int \frac{x\cos x\, dx}{\operatorname{sen}^2 x}$	20. $\int \operatorname{sen} x \ln(\operatorname{tg} x)\,dx$

1.2.3.4 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS.

Cuando se integran funciones trigonométricas que no sean directas, es necesario utilizar identidades trigonométricas. Se las ha clasificado de la siguiente manera:

TIPO I: Integrales de la forma: $\int \operatorname{sen}^n x\, dx$ **o** $\int \cos^n x\, dx$

Para este caso se sugiere, lo siguiente:

1. Si "n" es **IMPAR** usar: $\operatorname{sen}^2 x = 1-\cos^2 x$, $\cos^2 x = 1-\operatorname{sen}^2 x$
2. Si "n" es **PAR** usar: $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

Ejemplo 1

Calcular $\int \cos^2 x\, dx$

SOLUCIÓN:
Usamos la regla para la potencia par:

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x\, dx &= \int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx\\ &= \frac{1}{2}\left[\int 1dx + \int \cos 2x dx\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[x+\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right]+C\end{aligned}$$

Ejemplo 2

Calcular $\int \operatorname{sen}^3 x\, dx$

SOLUCIÓN:
Ahora usamos la regla para la potencia impar:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^3 x\, dx &= \int \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x dx\\ &= \int (1-\cos^2 x)\operatorname{sen} x dx\\ &= \int \operatorname{sen} x dx - \int \cos^2 x \operatorname{sen} x dx\end{aligned}$$

De esto último, la primera integral es directa y la segunda es por sustitución.

1. $\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x$

2. $\int \cos^2 x \operatorname{sen} x dx$ requiere el cambio de variable $\boxed{t = \cos x}$ entonces $dt = -\operatorname{sen} x dx$.

Reemplazando resulta: $\int \cos^2 x \operatorname{sen} x dx = \int t^2(-dt) = -\dfrac{\cos^3 x}{3}$

FINALMENTE: $\int \operatorname{sen}^3 x dx = -\cos x + \dfrac{\cos^3 x}{3} + C$

Ejemplo 3

Calcular $\int \cos^4 x\, dx$

SOLUCIÓN:
Ahora usamos la regla para la potencia par:

$$\begin{aligned}
\int \cos^4 x\, dx &= \int \left(\cos^2 x\right)^2 dx \\
&= \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{4}\left[\int 1dx + \int 2\cos 2x dx + \int \cos^2 2x dx\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[x + 2\frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \int \left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[x + \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2}\left(\int 1dx + \int \cos 4x dx\right)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[x + \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2}\left(x + \frac{\operatorname{sen} 4x}{4}\right)\right] + C
\end{aligned}$$

TIPO II. Integrales de la forma $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$

1. si $m \vee n$ son impares

Ejemplo

Calcular $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^{-4} x\, dx$

SOLUCIÓN:
Como el exponente de seno es impar, hacemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^3 x \cos^{-4} x\, dx &= \int \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x \cos^{-4} x\, dx \\
&= \int \left(1-\cos^2 x\right)\operatorname{sen} x \cos^{-4} x\, dx \\
&= \int (\cos x)^{-4} \operatorname{sen} x\, dx - \int (\cos x)^{-2} \operatorname{sen} x\, dx
\end{aligned}$$

Ambas integrales se resuelven por sustitución. Haciendo cambio de variable $t = \cos x$ de donde $dt = -\operatorname{sen} x dx$, resulta

$$\int (\cos x)^{-4} \operatorname{sen} x\,dx - \int (\cos x)^{-2} \operatorname{sen} x\,dx = \int t^{-4}(-dt) - \int t^{-2}(-dt)$$
$$= -\frac{t^{-3}}{-3} + \frac{t^{-1}}{-1} + C$$
$$= \frac{\cos^{-3} x}{3} - \cos^{-1} x + C$$

2. si $m \wedge n$ son pares

Ejemplo

Calcular $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\,dx$

SOLUCIÓN:
Como ambos son pares, entonces:

$$\int \operatorname{sen}^2 x\cos^4 x\,dx = \int \operatorname{sen}^2 x\left(\cos^2 x\right)^2 dx$$
$$= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx$$
$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)\left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right)dx$$
$$= \frac{1}{8}\int \left(1+\cos 2x-\cos^2 2x-\cos^3 2x\right)dx$$
$$= \frac{1}{8}\left[\int 1dx + \int \cos 2x dx - \int \cos^2 2x dx - \int \cos^3 2x dx\right]$$

Las dos últimas integrales son trigonométricas

$$= \frac{1}{8}\left[x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} - \int\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx - \int \cos^2 2x \cos 2x dx\right]$$
$$= \frac{1}{8}\left[x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} - \frac{1}{2}\left(\int 1dx + \int \cos 4x dx\right) - \int \left(1-\operatorname{sen}^2 2x\right)\cos 2x\right]$$
$$= \frac{1}{8}\left[x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} - \frac{1}{2}\left(x + \frac{\operatorname{sen} 4x}{4}\right) - \left(\int \cos 2x dx - \int \operatorname{sen}^2 2x \cos 2x dx\right)\right]$$
$$= \frac{1}{8}\left[x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} - \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{8} - \left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{2} - \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{6}\right)\right] + C$$

FINALMENTE:

$$\int \operatorname{sen}^2 x\cos^4 x\,dx = \frac{1}{8}\left[\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{8} + \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{6}\right] + C$$

TIPO III. Integrales de la forma: $\int \operatorname{sen} mx \cos nx dx$ **,** $\int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx dx$ **,** $\int \cos mx \cos nx dx$

En este caso se recomienda usar, las siguientes identidades como sea conveniente:

$$\operatorname{sen} mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x\right]$$
$$\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx = -\frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x - \cos(m-n)x\right]$$
$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right]$$

Ejemplo 1

Calcular: $\int \operatorname{sen} 2x \cos 3x \, dx$

SOLUCIÓN:
Empleando la identidad trigonométrica respectiva y simplificando, resulta:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} 2x \cos 3x \, dx &= \int \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(2+3)x + \operatorname{sen}(2-3)x\right]dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\int \operatorname{sen} 5x dx + \int \operatorname{sen}(-x) dx\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 5x}{5} + \cos x\right] + C\end{aligned}$$

Ejemplo 2

Calcular $\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x dx$

SOLUCIÓN:
Agrupando y aplicando identidades, tenemos:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x dx &= \int (\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x) \operatorname{sen} 3x dx \\ &= \int -\frac{1}{2}\left[\cos(1+2)x - \cos(1-2)x\right]\operatorname{sen} 3x dx \\ &= -\frac{1}{2}\int \left[\cos 3x \operatorname{sen} 3x - \cos(-x)\operatorname{sen} 3x\right]dx \\ &= -\frac{1}{2}\left[\int \operatorname{sen} 3x \cos 3x dx - \int \operatorname{sen} 3x \cos x dx\right] \\ &= -\frac{1}{2}\left[\int \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen} 6x + \operatorname{sen} 0x\right] - \int \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 2x\right]dx\right] \\ &= -\frac{1}{4}\left[\int \operatorname{sen} 6x dx - \int \operatorname{sen} 4x dx - \int \operatorname{sen} 2x dx\right] \\ &= -\frac{1}{4}\left[-\frac{\cos 6x}{6} + \frac{\cos 4x}{4} + \frac{\cos 2x}{2}\right] + C\end{aligned}$$

TIPO IV. Integrales de la forma: $\int \operatorname{tg}^n x\,dx$ **y** $\int \cot g^n x\,dx$

Aquí se recomienda usar las identidades: $\boxed{\begin{array}{l}\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1 \\ \cot g^2 x = \csc^2 x - 1\end{array}}$

Ejemplo 1

Calcular $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^3 x\,dx &= \int \operatorname{tg}^2 x\,tgxdx \\ &= \int \left(\sec^2 x - 1\right)\operatorname{tg} xdx \\ &= \int \sec^2 x \operatorname{tg} xdx - \int \operatorname{tg} xdx\end{aligned}$$

La segunda integral es directa, mientras que la primera es por sustitución.

$\boxed{t = \operatorname{tg} x}$ de donde $\boxed{dt = \sec^2 xdx}$

FINALMENTE:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^3 x\,dx &= \int tdt - \left(-\ln\left|\cos x\right|\right) \\ &= \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln\left|\cos x\right| + C\end{aligned}$$

Ejemplo 2

Calcular $\int \cot g^4 x\,dx$

SOLUCIÓN:

Empleando la identidad trigonométrica respectiva y aplicando propiedades, resulta:

$$\begin{aligned}\int \cot g^4 x\,dx &= \int \cot g^2 x \cot g^2 x\,dx \\ &= \int \cot g^2 x\left(\csc^2 x - 1\right)dx \\ &= \int \cot g^2 x \csc^2 xdx - \int \cot g^2 xdx\end{aligned}$$

La primera integral es por sustitución y la segunda se emplea la identidad trigonométrica respectiva, es decir:

$$\int \cot g^4 x\,dx = \int \Big(\underbrace{\cot gx}_{t}\Big)^2 \underbrace{\csc^2 x\,dx}_{-dt} - \int \cot g^2 x\,dx$$
$$= -\frac{\cot g^3 x}{3} - \int \left(\csc^2 x - 1\right)dx$$
$$= -\frac{\cot g^3 x}{3} - \int \csc^2 x dx + \int dx$$
$$= -\frac{\cot g^3 x}{3} + \cot gx + x + C$$

TIPO V. Integrales de la forma: $\int \mathrm{tg}^m\, x \sec^n\, xdx$ **y** $\int \cot g^m x \csc^n\, xdx$

Caso 1. Si el exponente de la secante o cosecante "n" es par, se procede con el diferencial de la tangente o cotangente.

Ejemplo

Calcular $\int \mathrm{tg}^{-3/2}\, x \sec^4\, xdx$

SOLUCIÓN:

$$\int \mathrm{tg}^{-3/2}\, x \sec^4 x\,dx = \int \mathrm{tg}^{-3/2}\, x\, \underbrace{\sec^2 x}\sec^2 xdx$$
$$= \int \mathrm{tg}^{-3/2}\, x \left(\mathrm{tg}^2 x + 1\right)\sec^2 x\,dx$$
$$= \int \mathrm{tg}^{1/2}\, x \sec^2 x\,dx + \int \mathrm{tg}^{-3/2}\, x \sec^2 x\,dx$$

Las dos integrales últimas se hacen por sustitución:

$$\int \mathrm{tg}^{-3/2}\, x \sec^4 xdx = \int \Big(\underbrace{\mathrm{tg}\,x}_{t}\Big)^{1/2} \underbrace{\sec^2 x\,dx}_{dt} + \int \Big(\underbrace{\mathrm{tg}\,x}_{t}\Big)^{-3/2} \underbrace{\sec^2 x\,dx}_{dt}$$
$$= \frac{\mathrm{tg}^{3/2}\, x}{3/2} + \frac{\mathrm{tg}^{-1/2}\, x}{-1/2} + C$$
$$= \tfrac{2}{3}\mathrm{tg}^{3/2}\, x - 2\,\mathrm{tg}^{-1/2}\, x + C$$

Caso 2. Si el exponente de la tangente o cotangente "m" es impar, se procede con el diferencial de la secante o cosecante.

Ejemplo

Calcular $\int \mathrm{tg}^3\, x \sec^{-1/2}\, xdx$

SOLUCIÓN:
Descomponiendo para obtener el diferencial de la secante

$$\int \operatorname{tg}^3 x \sec^{-1/2} x dx = \int \operatorname{tg}^2 x \sec^{-3/2} x \underbrace{(\sec x \operatorname{tg} x dx)}_{d(\sec x)}$$

y luego resolviendo, tenemos:

$$\int \operatorname{tg}^3 x \sec^{-1/2} x dx = \int (\sec^2 x - 1)\sec^{-3/2} x (\sec x \operatorname{tg} x dx)$$

$$= \int \sec^{1/2} x (\sec x \operatorname{tg} x dx) - \int \sec^{-3/2} x (\sec x \operatorname{tg} x dx)$$

estas últimas integrales se resuelven por sustitución:

$$\int \operatorname{tg}^3 x \sec^{-1/2} x dx = \int \Big(\underbrace{\sec x}_{t}\Big)^{1/2} \underbrace{(\sec x \operatorname{tg} x dx)}_{dt} - \int \Big(\underbrace{\sec x}_{t}\Big)^{-3/2} \underbrace{(\sec x \operatorname{tg} x dx)}_{dt}$$

$$= \tfrac{2}{3}\sec^{3/2} x + 2\sec^{-1/2} x$$

Otras integrales trigonométricas pueden requerir tratamientos ya definidos:

Ejemplo

Calcular $\int \sec^3 x\, dx$

SOLUCIÓN:
Esta integral se resuelve por partes

$$\int \sec^3 x\, dx = \int \underbrace{\sec x}_{u} \underbrace{\sec^2 x dx}_{dv}$$

Entonces si tomamos $u = \sec x$ tenemos $du = \sec x \operatorname{tg} x dx$ y si tomamos $dv = \sec^2 x dx$ tenemos $v = \operatorname{tg} x$
Ahora, integrando

$$\int \sec^3 x\, dx = \overbrace{\sec x}^{u}\overbrace{\operatorname{tg} x}^{v} - \int \overbrace{\operatorname{tg} x}^{v} \overbrace{\sec x \operatorname{tg} x dx}^{du}$$

$$= \sec x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg}^2 x \sec x dx$$

$$= \sec x \operatorname{tg} x - \int (\sec^2 x - 1)\sec x dx$$

$$= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx$$

$$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec^3 x dx + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|$$

FINALMENTE, despejamos la integral buscada

$$2\int \sec^3 x\, dx = \sec x \operatorname{tg} x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|$$

$$\int \sec^3 x\, dx = \tfrac{1}{2}\sec x \operatorname{tg} x + \tfrac{1}{2}\ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$$

Ejercicios Propuestos 1.4

Encuentre las antiderivadas de:

1. $\int \left(2-3\cos^2 2x\right)dx$	11. $\int tan^5 x\, dx$
2. $\int \operatorname{sen}^3 3x dx$	12. $\int c\operatorname{tg}^6 x\, dx$
3. $\int \cos^6 x\, dx$	13. $\int \tan^2 5\, x\, dx$
4. $\int \cos^5 x\sqrt{\operatorname{sen} x}\, dx$	14. $\int \operatorname{tg}^5 x \sec^{-3/2} x dx$
5. $\int \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 5x\, dx$	15. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}$
6. $\int \operatorname{sen}\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{3}\, dx$	16. $\int \frac{dx}{Sen\left(\frac{x}{2}\right)Cos^3\left(\frac{x}{2}\right)}$
7. $\int sen\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)dx$	17. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x\cos^4 x}$
8. $\int \cos x\cos^2 3x\, dx$	18. $\int \frac{\operatorname{sen}\left(x+\pi/4\right)}{\operatorname{sen} x\cos x}dx$
9. $\int \operatorname{sen}^3(2x)\cos^7(2x)\, dx$	19. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x\cos x}$
10. $\int \cos x\cos 2x\cos 3x\, dx$	20. $\int \csc^3 x\, dx$

1.2.3.5 INTEGRACIÓN POR SUSTITUCION TRIGONOMETRICA.

Se trata ahora de convertir las integrales dadas en directas mediante una sustitución trigonométrica. Usualmente presenta la forma de radicales con suma o diferencia de cuadrados, en tal caso se recomienda:

Si tenemos $\sqrt{a^2-x^2}$ sustituir $x = a\operatorname{sen} t$

Si tenemos $\sqrt{a^2+x^2}$ sustituir $x = a\operatorname{tg} t$

Si tenemos $\sqrt{x^2-a^2}$ sustituir $x = a\sec t$

Ejemplo 1

Calcular $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx$

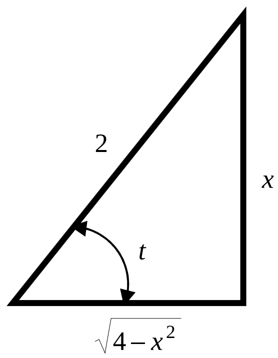
SOLUCIÓN:

En este caso hacemos $x = 2\operatorname{sen} t$ entonces $dx = 2\cos t dt$

Reemplazando y resolviendo, resulta:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx &= \int \frac{\sqrt{4-(2\operatorname{sen} t)^2}}{(2\operatorname{sen} t)^2} 2\cos t dt \\
&= \int \frac{\sqrt{4-4\operatorname{sen}^2 t}}{4\operatorname{sen}^2 t} 2\cos t dt \\
&= \int \frac{\sqrt{4(1-\operatorname{sen}^2 t)}}{2\operatorname{sen}^2 t} \cos t dt \\
&= \int \frac{\sqrt{4\cos^2 t}}{2\operatorname{sen}^2 t} \cos t dt \\
&= \int \frac{2\cos t}{2\operatorname{sen}^2 t} \cos t dt \\
&= \int \frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t} dt \\
&= \int \cot g^2 t dt \\
&= \int (\csc^2 t - 1) dt \\
&= \int \csc^2 t dt - \int dt \\
&= -\cot gt - t + C
\end{aligned}
$$

Ahora hay regresar a un expresión en "x", para lo cual del cambio de variable tenemos $\operatorname{sen} t = \frac{x}{2}$. Por trigonometría, hacemos el siguiente triángulo:



De la figura, observamos que $\cot g\, t = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$ y como $t = \operatorname{arcsen} \frac{x}{2}$ tenemos:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx &= -\cot gt - t + C \\
&= -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - \operatorname{arcsen}\frac{x}{2} + C
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2

Calcular $\int \frac{x^3 dx}{\left(x^2+9\right)^{3/2}}$

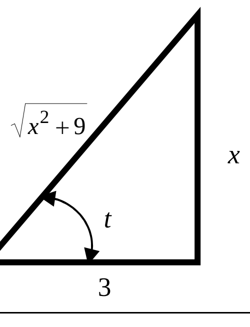
SOLUCIÓN:

En este caso hacemos $x = 3\operatorname{tg} t$ entonces $dx = 3\sec^2 t\, dt$

Reemplazando y resolviendo, resulta:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^3 dx}{\left(x^2+9\right)^{3/2}} &= \int \frac{(3\operatorname{tg} t)^3}{\left((3\operatorname{tg} t)^2+9\right)^{3/2}} 3\sec^2 t dt \\
&= \int \frac{27\operatorname{tg}^3 t\ 3\sec^2 t}{\left(\sqrt{9\operatorname{tg}^2 t+9}\right)^3} dt \\
&= \int \frac{81\operatorname{tg}^3 t\ \sec^2 t}{(3\sec t)^3} dt \\
&= \int \frac{81\operatorname{tg}^3 t\ \sec^2 t}{27\sec^3 t} dt \\
&= \int 3\frac{\operatorname{tg}^3 t}{\sec t} dt \\
&= 3\int \frac{\operatorname{tg} t\operatorname{tg}^2 t}{\sec t} dt \\
&= 3\int \frac{\operatorname{tg} t\left(\sec^2 t-1\right)}{\sec t} dt \\
&= 3\left[\int \frac{\operatorname{tg} t\sec^2 t}{\sec t} dt - \int \frac{\operatorname{tg} t}{\sec t} dt\right] \\
&= 3\left[\int \sec t\operatorname{tg} t dt - \int \operatorname{sen} t dt\right] \\
&= 3[\sec t + \cos t] + C
\end{aligned}
$$

Ahora por trigonometría, del cambio de variable $\operatorname{tg} t = \frac{x}{3}$ tenemos el siguiente triángulo:



Por tanto $\sec t = \frac{\sqrt{x^2+9}}{3}$ y $\cos t = \frac{3}{\sqrt{x^2+9}}$

FINALMENTE,

$$\int \frac{x^3 dx}{\left(x^2+9\right)^{3/2}} = 3\left[\frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{3}{\sqrt{x^2+9}}\right] + C$$

Ejemplo 3

Calcular $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^3}dx$

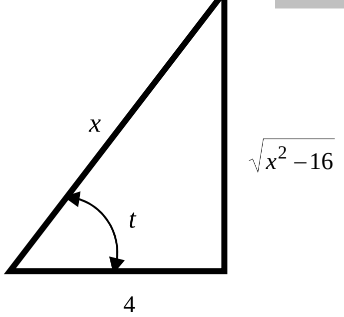
SOLUCIÓN:

En este caso hacemos $x = 4\sec t$ entonces $dx = 4\sec t \operatorname{tg} t dt$

Reemplazando y resolviendo, resulta:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^3}dx &= \int \frac{\sqrt{(4\sec t)^2-16}}{(4\sec t)^3} 4\sec t \operatorname{tg} t dt \\
&= \int \frac{\sqrt{16\sec^2 t - 16}}{4^3\sec^3 t} 4\sec t \operatorname{tg} t dt \\
&= \int \frac{\sqrt{16(\sec^2 t - 1)}}{4^2\sec^2 t} \operatorname{tg} t dt \\
&= \int \frac{\sqrt{16\operatorname{tg}^2 t}}{4^2\sec^2 t} \operatorname{tg} t dt \\
&= \int \frac{4\operatorname{tg} t}{4^2\sec^2 t} \operatorname{tg} t dt \\
&= \int \frac{\operatorname{tg}^2 t}{4\sec^2 t} dt \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{\frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\cos^2 t}} dt \\
&= \frac{1}{4}\int \operatorname{sen}^2 t dt \\
&= \frac{1}{4}\int \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right) dt \\
&= \frac{1}{8}\left[\int 1 dt - \int \cos 2t dt\right] \\
&= \frac{1}{8}\left[t - \frac{\operatorname{sen} 2t}{2}\right] + C \\
&= \frac{1}{8}\left[t - \frac{2\operatorname{sen} t\cos t}{2}\right] + C
\end{aligned}
$$

Ahora por trigonometría , del cambio de variable $\sec t = \frac{x}{4}$ tenemos el siguiente triángulo:



Por tanto, $t = arc\sec\frac{x}{4}$, $\operatorname{sen} t = \frac{\sqrt{x^2-16}}{x}$ y $\cos t = \frac{4}{x}$

FINALMENTE:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^3}dx = \frac{1}{8}\left[t - \frac{2\,\text{sen}\,t\cos t}{2}\right] + C$$

$$= \frac{1}{8}\left[arc\sec\frac{x}{4} - \frac{\sqrt{x^2-16}}{x}\frac{4}{x}\right] + C$$

En otras integrales, es necesario completar cuadrado primero.

Ejemplo 4

Calcular $\int \sqrt{5-4x-x^2}\,dx$

SOLUCIÓN:

Primero completamos cuadrado, para de allí realizar una simple sustitución algebráica y luego la sustitución trigonométrica que convenga.

$$\int \sqrt{5-4x-x^2}\,dx = \int \sqrt{5-\left(x^2+4x+4\right)+4}\,dx$$

$$= \int \sqrt{9-(x+2)^2}\,dx$$

En la última integral podemos hacer $u = x+2$ entonces $du = dx$ y la integral quedará así:

$$\int \sqrt{9-u^2}\,du$$

Para la cual la sustitución trigonométrica adecuadas es $u = 3\,\text{sen}\,t$ de la cual resulta $du = 3\cos t dt$. Reemplazando y resolviendo, tenemos:

$$\int \sqrt{9-u^2}\,du = \int \sqrt{9-9\,\text{sen}^2 t}\,3\cos t dt$$

$$= \int 3\cos t\, 3\cos t dt$$

$$= 9\int \cos^2 t dt$$

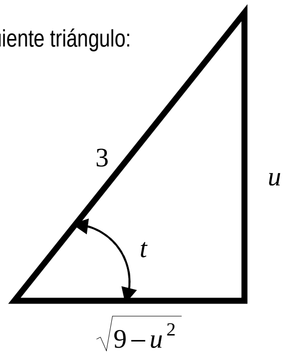
$$= 9\int \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt$$

$$= \frac{9}{2}\left[\int 1dt + \int \cos 2t dt\right]$$

$$= \frac{9}{2}\left[t + \frac{\text{sen}\,2t}{2}\right] + C$$

$$= \frac{9}{2}\left[t + \frac{2\,\text{sen}\,t\cos t}{2}\right] + C$$

Del cambio de variable $\text{sen}\,t = \frac{u}{3}$ obtenemos el siguiente triángulo:



Entonces $t = \operatorname{arcsen}\frac{u}{3}$ y $\cos t = \frac{\sqrt{9-u^2}}{3}$

Por tanto,

$$\int \sqrt{9-u^2}\,du = \frac{9}{2}\left[t + \operatorname{sen} t \cos t\right] + C$$

$$= \frac{9}{2}\left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{u}{3}\right) + \frac{u}{3}\frac{\sqrt{9-u^2}}{3}\right] + C$$

Finalmente, como $u = x+2$, reemplazando resulta:

$$\int \sqrt{9-u^2}\,du = \frac{9}{2}\left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{u}{3}\right) + \frac{u\sqrt{9-u^2}}{9}\right] + C$$

$$= \frac{9}{2}\left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{x+2}{3}\right) + \frac{(x+2)\sqrt{9-(x+2)^2}}{9}\right] + C$$

Ejercicio Propuestos 1.5

Encuentre las antiderivadas de:

1. $\int x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$	11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$
2. $\int \frac{dx}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}$	12. $\int \frac{\sec^2 x dx}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{tg} x + 1}}$
3. $\int \frac{x^2}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}dx$	13. $\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x dx}{\sqrt{9+\operatorname{sen}^4 x}}$
4. $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx$	14. $\int \frac{x \operatorname{arctg} x dx}{\sqrt{1+x^2}}$
5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}$	15. $\int \frac{x\, e^{arc\ tanx}}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}dx$
6. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}}$	16. $\int x^2\ arc\cos x\, dx$
7. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$	17. $\int \frac{\ln x\ dx}{x\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}}$
8. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}dx$	18. $\int \frac{xdx}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1-x^4}}$
9. $\int \frac{x^2\ dx}{\sqrt{4x-x^2}}$	19. $\int \frac{x^3\ dx}{x^4-x^2+2}$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+4x+13\right)^3}}$	20. $\int \frac{x^{11}\ dx}{x^8+3x^4+2}$

1.2.3.6 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

Cuando la función racional $\frac{p(x)}{q(x)}$ es una fracción propia, o sea que el grado del numerador es menor que el grado del denominador, se recomienda usar el método de fracciones parciales.

REGLA GENERAL

Sea $\frac{p(x)}{q(x)}$ una *fracción propia*. Entonces:

1. Se podrá expresar en tantas fracciones parciales como factores tenga el denominador $q(x)$.
2. Cada denominador de las fracciones parciales es un factor de $q(x)$.
3. El numerador de cada fracción parcial será un polinomio de un grado menor a su denominador.

Ahora veámos por caso.

CASO I: $q(x)$ se descompone en factores lineales diferentes

Ejemplo

Calcular $\int \frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x}dx$

SOLUCIÓN:

Note que tenemos la integral de una fracción propia (el grado del numerador es uno mientras que el grado del denominador es tres). Empecemos factorizando el denominador

$$\frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x}=\frac{5x+3}{x\left(x^2-2x-2\right)}=\frac{5x+3}{x(x-3)(x+1)}$$

El denominar se expresa en 3 factores lineales diferentes, entonces sus fracciones parciales serían de la forma siguiente:

$$\frac{5x+3}{x(x-3)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x+1}$$

Ahora debemos encontrar los valores de A, B y C

Multiplicando por $x(x-3)(x+1)$ a cada termino, resulta:

$$5x+3=A(x-3)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-3)$$

Una manera rápida y efectiva es evaluando la última expresión en las raíces de $q(x)$:

Si $x=0$, resulta:

$$5(0)+3=A(0-3)(0+1)+B(0)(0+1)+C(0)(0-3)$$
$$3=-3A$$
$$A=-1$$

Si $x=3$, resulta:

$$5(3)+3=A(3-3)(3+1)+B(3)(3+1)+C(3)(3-3)$$
$$18=12B$$
$$B=3/2$$

Si $x=-1$, resulta:

$$
\begin{aligned}
&5(-1)+3 = A(-1-3)(-1+1)+B(-1)(-1+1)+C(-1)(-1-3)\\
&-2 = 4C\\
&C = -\tfrac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Integrando,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x}dx &= \int\left(\frac{-1}{x}+\frac{3/2}{x-3}+\frac{-1/2}{x+1}\right)dx\\
&= -\int \frac{1}{x}dx + \frac{3}{2}\int\frac{1}{x-3}dx - \frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}dx\\
&= -\ln|x| + \tfrac{3}{2}\ln|x-3| - \tfrac{1}{2}\ln|x+1| + C
\end{aligned}
$$

CASO II. En $q(x)$ hay factores lineales repetidos

Ejemplo

Calcular $\int \frac{3x^2-8x+13}{(x+3)(x-1)^2}dx$

SOLUCIÓN:
En este caso las fracciones parciales para la integral serían de la forma:

$$\frac{3x^2-8x+13}{(x+3)(x-1)^2} = \frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

multiplicando por $(x+3)(x-1)^2$ se obtiene:

$$3x^2-8x+13 = A(x-1)^2 + B(x+3)(x-1)+C(x+3)$$

Evaluando para las raíces:
Si $x=-3$, resulta:

$$
\begin{aligned}
&3(-3)^2-8(-3)+13 = A(-3-1)^2+B(-3+3)(x-1)+C(-3+3)\\
&64 = 16A\\
&A = 4
\end{aligned}
$$

Si $x=1$, resulta:

$$
\begin{aligned}
&3(1)^2-8(1)+13 = A(1-1)^2+B(1+3)(1-1)+C(1+3)\\
&8 = 4C\\
&C = 2
\end{aligned}
$$

Como ya no disponemos de otra raíz, evaluamos para cualquier otro x y empleamos los valores ya encontrados:
Si $x=0$, resulta:

$$
\begin{aligned}
&3(0)^2-8(0)+13 = 4(0-1)^2+B(0+3)(0-1)+2(0+3)\\
&13 = 4-3B++6\\
&B = -1
\end{aligned}
$$

Integrando

$$
\begin{aligned}
\int \frac{3x^2-8x+13}{(x+3)(x-1)^2}dx &= \int\left(\frac{4}{x+3}+\frac{-1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}\right)dx\\
&= 4\int\frac{1}{x+3}dx - \int\frac{1}{x-1}dx + 2\int\frac{1}{(x-1)^2}dx\\
&= 4\ln|x+3| - \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + C
\end{aligned}
$$

CASO III. En $q(x)$ hay factores cuadráticos irreducibles

Ejemplo 1

Calcular $\int \frac{5x^2+2}{x^3-4x^2+5x}dx$

SOLUCIÓN:
En este caso las fracciones parciales para la integral serían de la forma:

$$\frac{5x^2+2}{x^3-4x^2+5x}=\frac{5x^2+2}{x\left(x^2-4x+5\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B(2x-4)+C}{x^2-4x+5}$$

Note que para el polinomio de grado uno, que es numerador de la fracción con denominador el factor cuadrático, se lo define con la derivada del denominador; por asunto de facilitar el cálculo de la derivada.

Simplificando, tenemos: $5x^2+2=A\left(x^2-4x+5\right)+\left[B(2x-4)+C\right](x)$

Evaluando para $x=0$,

$$\begin{aligned}5(0)^2+2&=A\left((0)^2-4(0)+5\right)+\left[B(2(0)-4)+C\right](0)\\ 2&=5A\\ A&=\tfrac{2}{5}\end{aligned}$$

Para $x=2$, porque anulamos el término que contiene a B y como ya se conoce el valor de A

$$\begin{aligned}5(2)^2+2&=A\left((2)^2-4(2)+5\right)+\left[B(2(2)-4)+C\right](2)\\ 22&=\tfrac{2}{5}(1)+2C\\ C&=\tfrac{54}{5}\end{aligned}$$

Evaluando para $x=1$ y empleando lo valores de A y C, tenemos:

$$\begin{aligned}5(1)^2+2&=\tfrac{2}{5}\left((1)^2-4(1)+5\right)+\left[B(2(1)-4)+\tfrac{54}{5}\right](1)\\ 7&=\tfrac{2}{5}(2)+\left[B(-2)+\tfrac{54}{5}\right]\\ B&=\tfrac{23}{10}\end{aligned}$$

Ahora, integrando resulta

$$\begin{aligned}\int\frac{5x^2+2}{x^3-4x^2+5x}dx&=\int\left(\frac{2/5}{x}+\frac{23/10\,(2x-4)+54/5}{x^2-4x+5}\right)dx\\ &=\frac{2}{5}\int\frac{1}{x}dx+\frac{23}{10}\int\frac{2x-4}{x^2-4x+5}dx+\frac{54}{5}\int\frac{1}{x^2-4x+5}dx\\ &=\frac{2}{5}\ln|x|+\frac{23}{10}\ln\left|x^2-4x+5\right|+\frac{54}{5}\int\frac{1}{(x-2)^2+1}dx\\ &=\frac{2}{5}\ln|x|+\frac{23}{10}\ln\left|x^2-4x+5\right|+\frac{54}{5}\operatorname{arctg}(x-2)+C\end{aligned}$$

Ejemplo 2

Calcular $\int\frac{x^3-1}{x^3+x}dx$

SOLUCIÓN:
Note que en esta integral la fracción no es propia, el grado del numerador es 3 y el del denominador también; por tanto **dividiendo primero**, se obtiene:

$$\frac{x^3-1}{x^3+x}=1-\frac{x+1}{x^3+x}$$

La integral sería ahora:

$$\int \frac{x^3-1}{x^3+x}dx = \int \left(1-\frac{x+1}{x^3+x}\right)dx$$
$$= \int 1dx - \int \frac{x+1}{x^3+x}dx$$

La primera integral es directa y la segunda por fracciones parciales. Entonces:

$$\frac{x+1}{x^3+x} = \frac{x+1}{x\left(x^2+1\right)} = \frac{A}{x} + \frac{B(2x)+C}{x^2+1}$$

Simplificando tenemos: $\boxed{x+1 = A\left(x^2+1\right)+\left[B(2x)+C\right](x)}$

Evaluando para $x=0$, resulta:
$$\boxed{\begin{aligned} 0+1 &= A\left(0^2+1\right)+\left[B(2(0))+C\right](0) \\ 1 &= A(1) \\ A &= 1 \end{aligned}}$$

Evaluando para $x=1$ y utilizando el valor obtenido para A, resulta

$$\begin{aligned} 1+1 &= 1\left(1^2+1\right)+\left[B(2(1))+C\right](1) \\ 2 &= 2+2B+C \\ 2B+C &= 0 \end{aligned}$$

Evaluando para $x=-1$ y utilizando el valor obtenido para A, resulta

$$\begin{aligned} -1+1 &= 1\left((-1)^2+1\right)+\left[B(2(-1))+C\right](-1) \\ 0 &= 2+2B-C \\ 2B-C &= -2 \end{aligned}$$

Tomando simultáneamente, ambos resultados, encontramos los valores de B y C

$$\begin{cases} 2B+C=0 \\ 2B-C=-2 \end{cases}$$

Bastaría con sumar miembro a miembro las ecuaciones y obtendríamos B: $\boxed{\begin{aligned} 4B &= -2 \\ B &= -\tfrac{1}{2} \end{aligned}}$

Entonces $\boxed{\begin{aligned} C &= -2B \\ C &= -2\left(-\frac{1}{2}\right) \\ C &= 1 \end{aligned}}$

OTRO MÉTODO para obtener A, B y C, que en ocasiones es más ventajoso, es el que sigue:
En la expresión $x+1 = A\left(x^2+1\right)+\left[B(2x)+C\right](x)$ simplificamos hasta obtener un polinomio reducido en ambos lados de la ecuación, es decir:

$$x+1 = Ax^2+A+2Bx^2+Cx$$
$$x+1 = (A+2B)x^2+Cx+A$$

De la última expresión, rápidamente se puede decir que: $\begin{cases} 0 = A+2B \\ 1 = C \\ 1 = A \end{cases}$

Por tanto $\begin{cases} A=1 \\ B=-\tfrac{1}{2} \\ C=1 \end{cases}$

En fin, ahora integrando tenemos:

$$\int \frac{x^3-1}{x^3+x}dx = \int 1dx - \int \frac{x+1}{x^3+x}dx$$
$$= x - \int\left(\frac{1}{x} + \frac{-\frac{1}{2}(2x)+1}{x^2+1}\right)dx$$
$$= x - \left[\int \frac{1}{x}dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx\right]$$
$$= x - \left[\ln|x| - \tfrac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + \operatorname{arctg}(x)\right] + C$$

Ejercicios Propuestos 1.6

Encuentre las antiderivadas de:

1. $\int \frac{dx}{(x-1)(x+3)}$	11. $\int \frac{4}{x^4-1}dx$
2. $\int \frac{(4x-2)dx}{x^3-x^2-2x}$	12. $\int \frac{(2x^2+3x+2)}{(x+2)(x^2+2x+2)}dx$
3. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x+3)^2}$	13. $\int \frac{x^5}{(x^2+4)^2}dx$
4. $\int \frac{(2-x^2)dx}{x^3+3x^2+2x}$	14. $\int \frac{4x^2+2x+8}{x(x^2+2)^2}dx$
5. $\int \frac{(x^2+x-10)}{(2x-3)(x^2+4)}dx$	15. $\int \frac{x^2-4x+3}{(x-1)^2(x^2+1)}dx$
6. $\int \frac{4x^2-x+1}{x^3-x^2+x-1}dx$	16. $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$
7. $\int \frac{x^3\,dx}{x^2+x-2}$	17. $\int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{\cos^2 x+\cos x-6}$
8. $\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-5x+6)}$	18. $\int \frac{\sec^2 t\,dt}{\sec^2 t-3\tan t+1}$
9. $\int \frac{3x-1}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}dx$	19. $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\operatorname{sen} x}$
10. $\int \frac{x^5+9x^3-9x^2-9}{x^3+9x}dx$	20. $\int \frac{dx}{1+e^{x/2}+e^{x/3}+e^{x/6}}$

1.2.3.7 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES TRIGONOMÉTRICAS

CASO I. Integrales del tipo $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)dx$

Se recomienda la siguiente sustitución $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ de donde $\begin{cases} \operatorname{sen} x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt \end{cases}$

Ejemplo

Calcular $\int \frac{1}{1+\operatorname{sen} x + \cos x}dx$

SOLUCIÓN:
Reemplazando y simplificando resulta:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+\operatorname{sen} x+\cos x}dx &= \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\left(\frac{2}{1+t^2}dt\right) \\
&= \int \frac{1}{\frac{1+t^2+2t+1-t^2}{1+t^2}}\left(\frac{2}{1+t^2}dt\right) \\
&= \int \frac{2}{2+2t}dt \\
&= \int \frac{2}{2(1+t)}dt \\
&= \int \frac{1}{1+t}dt \\
&= \ln|1+t| + C \\
&= \ln\left|1+\operatorname{tg}\tfrac{x}{2}\right| + C
\end{aligned}$$

CASO II Integrales donde se cumple que

$$\int R(-\operatorname{sen} x, -\cos x)dx = \int R(\operatorname{sen} x, \cos x)dx$$

Se recomienda usar la sustitución $\operatorname{tg} x = t$ de donde $\begin{cases} \operatorname{sen} x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{cases}$

Ejemplo

Calcular $\int \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x}dx$

SOLUCIÓN:
Reemplazando y simplificando

$$\int \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x}dx = \int \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2}\left(\frac{dt}{1+t^2}\right)$$
$$= \int \frac{1}{1+\frac{t^2}{1+t^2}}\left(\frac{dt}{1+t^2}\right)$$
$$= \int \frac{1}{\frac{1+t^2+t^2}{1+t^2}}\left(\frac{dt}{1+t^2}\right)$$
$$= \int \frac{1}{1+2t^2}dt$$
$$= \int \frac{1}{1+\left(\sqrt{2}\,t\right)^2}dt$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\,t\right)+C$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x\right)+C$$

Ejercicios Propuestos 1.7

Encuentre las antiderivadas de:

1. $\int \frac{dx}{2\operatorname{sen} x+\cos x+5}$	5. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x+\operatorname{tg} x}$
2. $\int \frac{dx}{3\operatorname{sen} x+4\cos x}$	6. $\int \frac{dx}{\cot x+\csc x}$
3. $\int \frac{1}{3\operatorname{sen} x-4\cos x}dx$	7. $\int \frac{\sin x+\cos x-1}{\sin x+\cos x+1}dx$
4. $\int \frac{sen^2 x}{1+sen^2 x}dx$	8. $\int \frac{\sin x-2\cos x}{\sin x+\cos x+1}dx$

Misceláneos

Encuentre las antiderivadas de:

1. $\int \frac{x-1}{x^3+4x}dx$	43. $\int \frac{e^{ar\operatorname{sen} x}+3x^2-4x+2}{\sqrt{1-x^2}}dx$
2. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3}dx$	44. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}dx$
3. $\int x^3\sqrt{x^2+9}\,dx$	45. $\int \operatorname{sen}^2 x\cos 2x\,dx$

4. $\int (3x^2-2x)e^{2x}dx$

5. $\int \sqrt[3]{\operatorname{sen} 2x}\cos^5 2x dx$

6. $\int \frac{2x-6}{(x-1)(x^2+1)}dx$

7. $\int \frac{2\cos x}{9-\cos 2x}dx$

8. $\int (x^2-5x+3)e^{-2x}dx$

9. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+4e^x+1}}dx$

10. $\int \frac{\operatorname{senh}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$

11. $\int \frac{x+1}{(x^2+4x+5)(x-1)}dx$

12. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}dx$

13. $\int \operatorname{sen}^2 2x\cos x dx$

14. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}dx$

15. $\int \cos 3x\cos 7x dx$

16. $\int \frac{3x^2-5x+4}{(x-2)^2(x^2+2x+3)}dx$

17. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x(\cos^2 x+1)}dx$

18. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx$

19. $\int x^3\sqrt{x^2+9}dx$

20. $\int \frac{x}{(x-3)^2}dx$

21. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+25}}dx$

22. $\int \frac{3x}{x^4+4x^2+5}dx$

23. $\int x^2 arctgx dx$

46. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}dx$

47. $\int \frac{dx}{1+senx+\cos x}$

48. $\int (3x^2-2x+5)\ln x dx$

49. $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$

50. $\int 2(3x^2+5)x dx$

51. $\int \frac{x^3}{x^8+4}dx$

52. $\int (6x^2-4x+3)arctgx\, dx$

53. $\int \frac{\operatorname{sen}^4 x}{\cos^4 x}dx$

54. $\int \frac{2\cos x-\operatorname{sen} x}{3\operatorname{sen} x+\cos x}dx$

55. $\int \cos\sqrt{x}dx$

56. $\int \frac{x}{x^3-1}dx$

57. $\int \frac{x-1}{x^3+4x}dx$

58. $\int \frac{x-1}{x^3+4x}dx$

59. $\int \frac{5x^3-3x^2+2x-1}{x^4+x^2}dx$

60. $\int \frac{\ln x}{x+4x\ln^2 x}dx$

61. $\int \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6}dx$

62. $\int \frac{7x+3}{(x^2+2x+2)(x-1)}dx$

63. $\int \frac{2x+3}{x^3+4x}dx$

64. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$

65. $\int \frac{1+x}{1+x^2}dx$

24. $\int \frac{\sqrt{1-4x^2}}{x}dx$	66. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$
25. $\int e^{2x}\,\mathrm{sen}\, x dx$	67. $\int \frac{x^2-2x}{x^3+1}dx$
26. $\int \frac{1-\mathrm{sen}\, x}{\cos x}dx$	68. $\int \frac{\left(16+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{x^2}dx$
27. $\int \frac{e^x}{e^{2x}\sqrt{e^{2x}+4}}dx$	69. $\int \frac{3\cos x-4\,\mathrm{sen}\, x}{\mathrm{sen}\, x+\cos x+1}dx$
28. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$	70. $\int \frac{3\,\mathrm{tg}\, x-4\cos^2 x}{\cos x}dx$
29. $\int x\sqrt{2x+1}dx$	71. $\int \frac{1}{x(3+\ln x)}dx$
30. $\int x^3e^{-x^2}dx$	72. $\int \frac{dx}{x^3-x}$
31. $\int \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$	73. $\int \frac{2x-5}{3x^2+6x+9}dx$
32. $\int \frac{2x-1}{x^3-2x^2-3x}dx$	74. $\int \frac{x-1}{x^3+4x}dx$
33. $\int \frac{x^4+3x^3-5x^2-4x+7}{x^3+x^2-5x+3}dx$	75. $\int 2x\,\mathrm{arcsen}\, x dx$
34. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt[3]{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}$	76. $\int \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{sen}\, x\cos^3 x}}$
35. $\int \frac{x^2-2}{3x+1}dx$	77. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{1+\mathrm{sen}\, x+\cos^2 x}}$
36. $\int (3x-1)\cos 2x dx$	78. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{1+\mathrm{sen}\, x+\cos^2 x}}$
37. $\int \ln(2x+3)dx$	79. $\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx$
38. $\int \frac{2x+3}{x^2-3x+2}dx$	80. $\int \frac{dx}{(x+1)\left(x^2+2x+2\right)}$
39. $\int \frac{x^3-1}{\left(x^2+4\right)x}dx$	81. $\int \frac{e^{4x}+3e^{2x}}{e^{4x}+5}dx$
40. $\int \frac{1-\mathrm{sen}\, x}{x+\cos x}dx$	82. $\int \sin 2x\cos 3x\cos 2x dx$
41. $\int \frac{2x+3}{x^2-3x+2}dx$	83. $\int \frac{x}{x+\sqrt[3]{x}}dx$
42. $\int \frac{\mathrm{sen}^2\, x dx}{\mathrm{sen}\, x+2\cos x}$	84. $\int \frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}$