APUNTE DE TRIÁNGULO

CLASIFICACIÓN

Los triángulos se clasifican

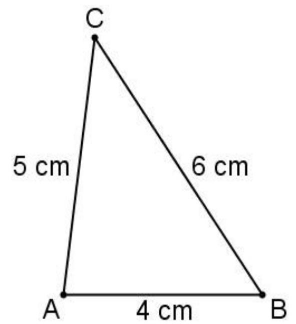
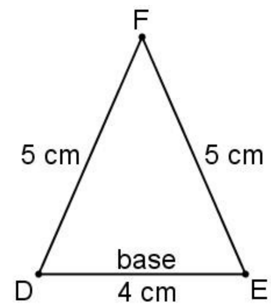
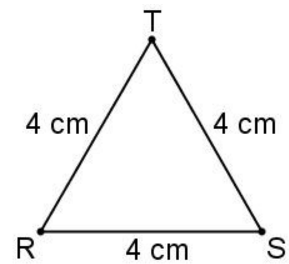
a) según sus lados en:

i) *escaleno*, si sus tres lados tienen distinta magnitud.

ii) *isósceles*, si tiene dos lados congruentes. Al tercer lado se le denomina *base*.

iii) *equilátero*, si sus tres lados son congruentes.

Ejemplo:

Triángulo escaleno	Triángulo isósceles	Triángulo equilátero
		

Apunte 1

Ejercicios 1

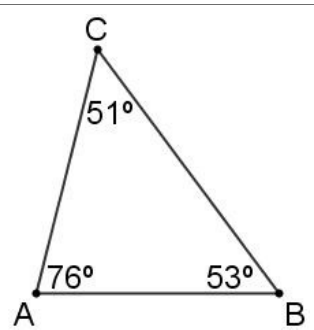
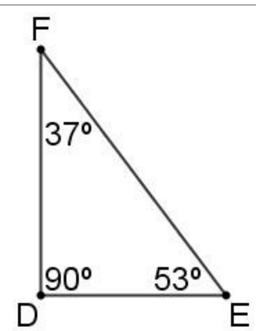
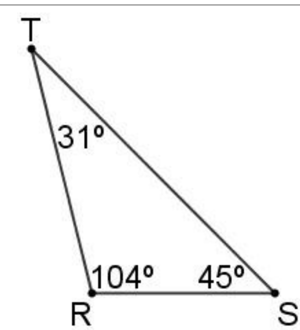
b) según sus ángulos en:

i) *acutángulo*, si sus tres ángulos interiores son agudos.

ii) *rectángulo*, si un ángulo interior es recto. Al lado opuesto a ese ángulo recto se le llama *hipotenusa* y a los otros dos lados *catetos*.

iii) *obtusángulo*, si un ángulo interior es obtuso.

Ejemplo:

Triángulo acutángulo	Triángulo rectángulo	Triángulo obtusángulo
		

Apunte 2

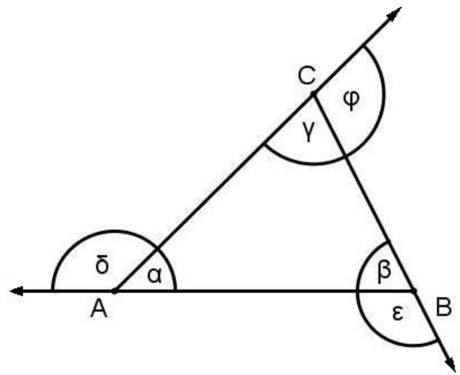
Ejercicios 2

© NELSON LILLO TERÁN
Junio 2017
http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588

Teorema: en cada triángulo, la suma de los ángulos interiores es igual a 180º .

Teorema: en cada triángulo, la suma de los ángulos exteriores es igual a 360º .

Teorema: en cada triángulo, cada ángulo exterior es igual a la suma de los ángulos interiores opuestos a él .



$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

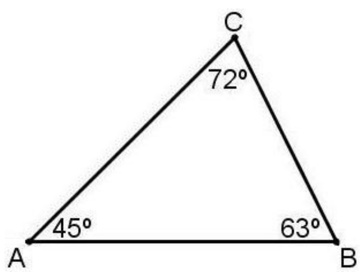
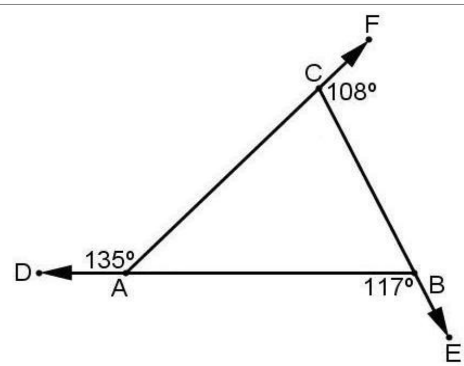
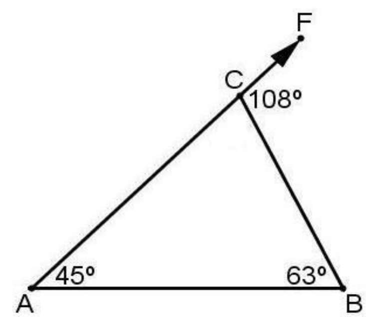
$\delta + \varepsilon + \varphi = 360^\circ$

$\varphi = \alpha + \beta$

$\delta = \beta + \gamma$

$\varepsilon = \alpha + \gamma$

Ejemplos:

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$	$\delta + \varepsilon + \varphi = 360^\circ$	$\varphi = \alpha + \beta$
		

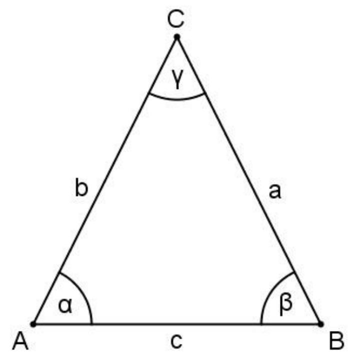
Apunte 3

Apunte 4

Apunte 5

http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588

Teorema: en cada triángulo, dos lados son congruentes si y sólo si los ángulos opuestos a ellos también son congruentes.

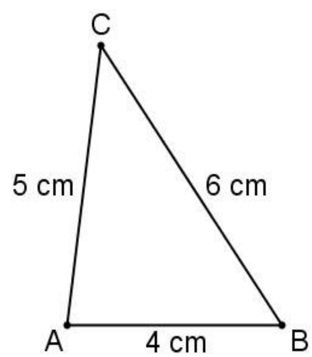


$$a = b \Leftrightarrow \alpha = \beta$$

Apunte 6

Teorema: en cada triángulo se cumple que la medida de cada lado es menor que la suma de las medidas de los otros dos lados y mayor que su diferencia absoluta. De manera más simple, el lado mayor es menor a la suma de los otros dos lados.

Ejemplo:



$$BC < AB + CA$$
$$6\text{ cm} < 4\text{ cm} + 5\text{ cm}$$

Apunte 7

SEMEJANZA (~)

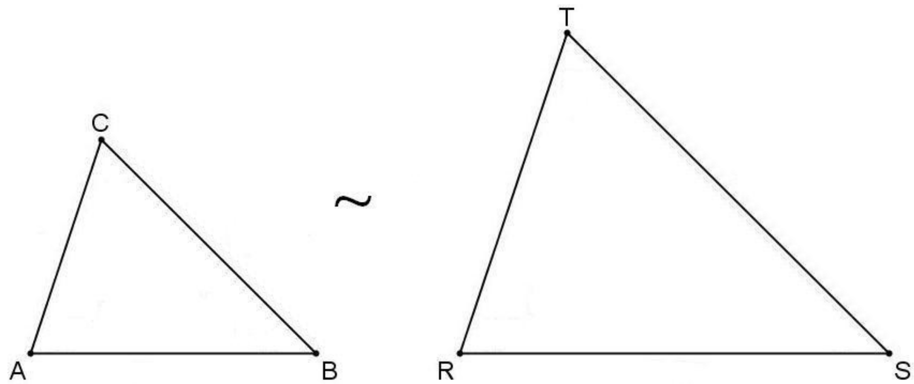
Dos triángulos son semejantes si y sólo si, existe una correspondencia vértice a vértice entre ellos tal que:

- sus ángulos interiores correspondientes son congruentes y
- sus lados homólogos están en una misma razón.

Ejemplo: en la figura siguiente se cumple que

- $\angle A \cong \angle R \wedge \angle B \cong \angle S \wedge \angle C \cong \angle T$
- $AB : RS = BC : ST = CA : TR$
- $\Delta ABC \sim \Delta RST$

Junio 2017
http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588



Apunte 8

CRITERIOS DE SEMEJANZA

a) ángulo - ángulo (A. A.)

Dos triángulos son semejantes, si existe una correspondencia vértice a vértice entre ellos tal que, dos pares de ángulos interiores correspondientes son congruentes.

Ejemplo: en la figura anterior $\angle A \cong \angle R \;\wedge\; \angle B \cong \angle S \;\Rightarrow\; \Delta ABC \sim \Delta RST$

b) lado - ángulo - lado (L. A. L.)

Dos triángulos son semejantes, si existe una correspondencia vértice a vértice entre ellos tal que, dos pares de lados son proporcionales y sus ángulos interiores correspondientes son congruentes.

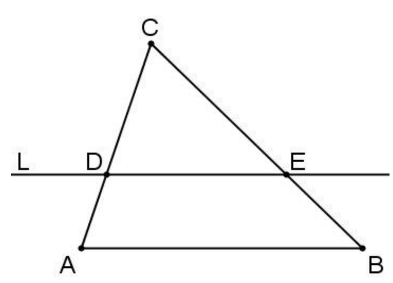
Ejemplo: en la figura anterior $AB : RS = AC : RT \;\wedge\; \angle A \cong \angle R \;\Rightarrow\; \Delta ABC \sim \Delta RST$

c) lado - lado - lado (L. L. L.)

Dos triángulos son semejantes, si existe una correspondencia vértice a vértice entre ellos tal que, sus lados correspondientes están en una misma razón.

Ejemplo: en la figura anterior $AB : RS = BC : ST = AC : RT \;\Rightarrow\; \Delta ABC \sim \Delta RST$

Teorema: si una recta intercepta a dos lados de un triángulo y es paralela al tercero, entonces el nuevo triángulo que se forma es semejante al primero.



$L \parallel \overline{AB} \;\Rightarrow\; \Delta ABC \sim \Delta DEC$

Junio 2017
http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588

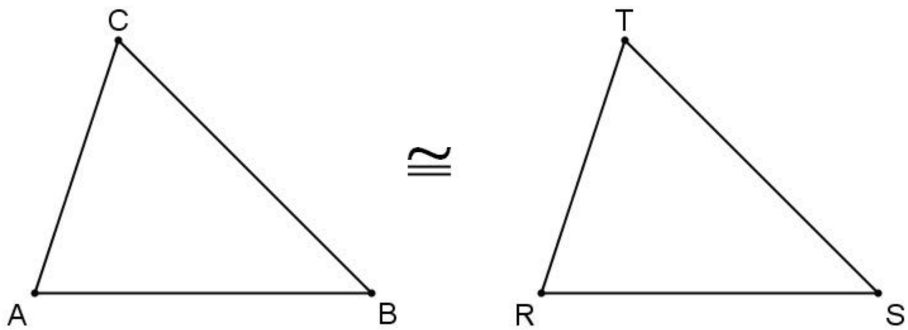
CONGRUENCIA (≅)

Dos triángulos son congruentes si y sólo si, existe una correspondencia vértice a vértice entre ellos tal que:

- sus ángulos correspondientes son congruentes y
- sus lados homólogos tienen igual medida.

Ejemplo: en la figura siguiente se cumple que

- $\angle A \cong \angle R \ \wedge \ \angle B \cong \angle S \ \wedge \ \angle C \cong \angle T$
- $AB = RS \ \wedge \ BC = ST \ \wedge \ CA = TR$
- $\Delta ABC \cong \Delta RST$



Apunte 9

CRITERIOS DE CONGRUENCIA

a) ángulo - lado - ángulo (A. L. A.)

Dos triángulos son congruentes, si existe una correspondencia vértice a vértice entre ellos tal que, dos pares de ángulos interiores correspondientes son congruentes y los lados respectivos también.

Ejemplo: en la figura anterior $\angle A \cong \angle R \ \wedge \ \angle B \cong \angle S \ \wedge \ AB = RS \ \Rightarrow \ \Delta ABC \cong \Delta RST$

b) lado - ángulo - lado (L. A. L.)

Dos triángulos son congruentes, si existe una correspondencia vértice a vértice entre ellos tal que, dos pares de lados homólogos son congruentes y los ángulos interiores comprendidos también.

Ejemplo: en la figura anterior $AB = RS \ \wedge \ AC = RT \ \wedge \ \angle A \cong \angle R \ \Rightarrow \ \Delta ABC \cong \Delta RST$

c) lado - lado - lado (L. L. L.)

Dos triángulos son congruentes, si existe una correspondencia vértice a vértice entre ellos tal que, sus lados correspondientes son congruentes.

Ejemplo: en la figura anterior $AB = RS \ \wedge \ BC = ST \ \wedge \ AC = RT \ \Rightarrow \ \Delta ABC \cong \Delta RST$

Junio 2017
http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588

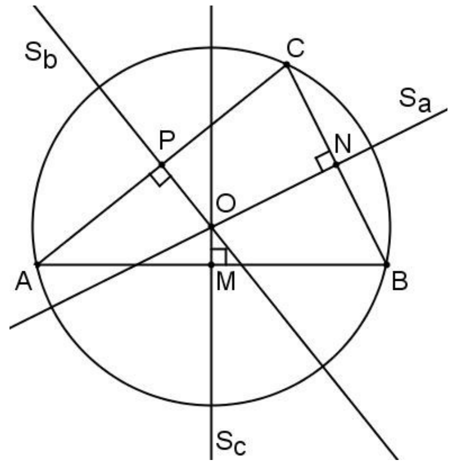
SIMETRAL

Definición

Una recta es simetral de un triángulo si y sólo si, es perpendicular, en su punto medio, a un lado del triángulo.

En cada triángulo sus tres simetrales se interceptan en un y sólo un punto llamado *circuncentro* (centro de la circunferencia circunscrita al triángulo).

Ejemplo: en la figura siguiente S_a , S_b y S_c son las simetrales del Δ ABC y O es el circuncentro.



El circuncentro se encuentra en

- el interior del triángulo, si y sólo si el triángulo es acutángulo.
- la hipotenusa del triángulo, si y sólo si el triángulo es rectángulo.
- el exterior del triángulo, si y sólo si el triángulo es obtusángulo.

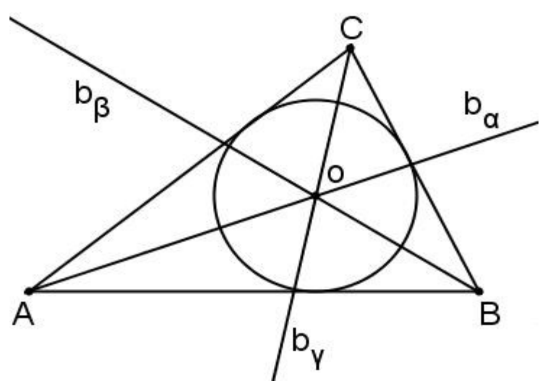
Apunte 10

BISECTRIZ

Un rayo es bisectriz de un triángulo, si bisecta un ángulo interior o exterior de él.

Las tres bisectrices de los ángulos interiores de cada triángulo se interceptan en un y sólo un punto llamado *incentro* (centro de la circunferencia inscrita al triángulo).

Ejemplo: en la figura siguiente b_α , b_β y b_γ son las bisectrices de los ángulos interiores del Δ ABC y O es el incentro.

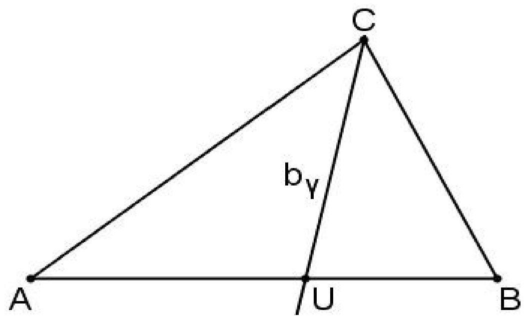


Apunte 11

Teoremas de Apolonio

Teorema: En cada triángulo, cada bisectriz de un ángulo interior, divide interiormente al lado opuesto en la razón de los otros dos lados.

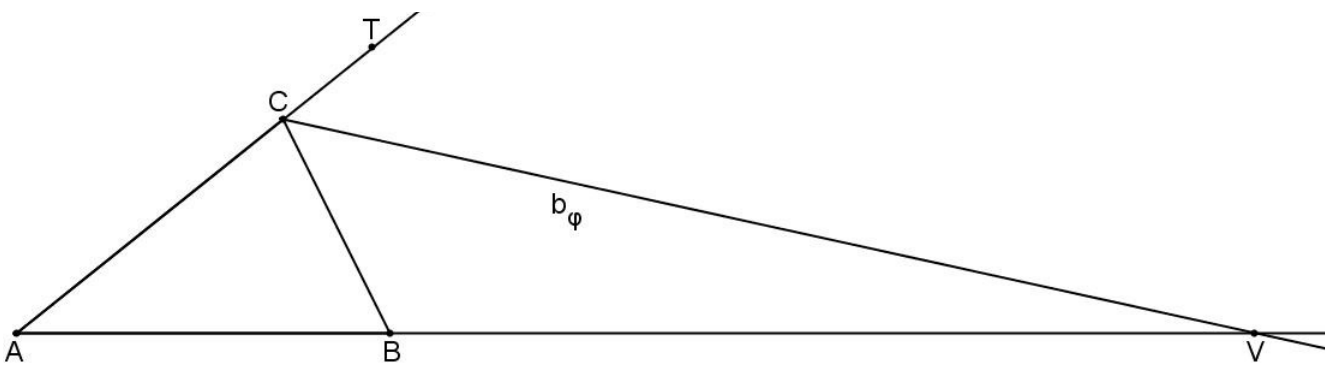
Ejemplo: en la figura siguiente b_γ es bisectriz de $\angle ACB$. $AU : BU = AC : BC$



Apunte 12

Teorema: en cada triángulo, cada bisectriz de un ángulo exterior, divide exteriormente al lado opuesto en la razón de los otros dos lados.

Ejemplo: en la figura siguiente b_φ es bisectriz de $\angle BCT$. $AV : BV = AC : BC$



Junio 2017
http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588

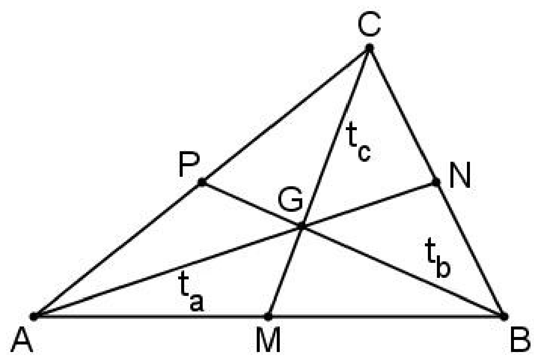
TRANSVERSAL DE GRAVEDAD

Definición

Se llama transversal de gravedad de un triángulo, al trazo que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.

- las 3 transversales de gravedad de cada triángulo se interceptan en un y sólo un punto llamado *centro de gravedad* o *baricentro* el cual divide a cada una de ellas en la razón 2 : 1.
- las 3 transversales de gravedad de cada triángulo determinan 6 triángulos de igual área.

  Ejemplo: en la figura siguiente se muestran las transversales de gravedad del Δ ABC y el centro de gravedad o baricentro (G) . Además se exponen sus propiedades.



M , N y P son puntos medios de los lados respectivos.

Transversales de gravedad : t_a , t_b y t_c

Centro de gravedad : G

Propiedades :

AG : GN = BG : GP = CG : GM = 2 : 1

Δ AMG , Δ MBG , Δ BNG , Δ NCG , Δ CPG y Δ PAG tienen áreas iguales.

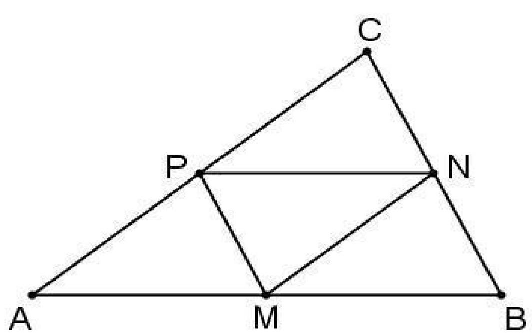
Apunte 13

MEDIANA

Definición

Se denomina mediana de un triángulo al trazo que une los puntos medios de dos lados de él. Cada mediana es paralela al tercer lado y mide la mitad de él. Los 4 triángulos menores que se forman son congruentes entre sí y semejantes al triángulo mayor.

Ejemplo: en la figura siguiente se muestran las medianas del Δ ABC y sus propiedades.



M , N y P son puntos medios de los lados respectivos.

Medianas : $\overline{MN}$, $\overline{NP}$ y $\overline{PM}$

Propiedades :

$\overline{NP} \,||\, \overline{AB}$, $\overline{MN} \,||\, \overline{AC}$ y $\overline{PM} \,||\, \overline{BC}$

$NP = \frac{1}{2}AB$, $MN = \frac{1}{2}AC$ y $PM = \frac{1}{2}BC$

$\Delta AMP \cong \Delta MBN \cong \Delta PNC \cong \Delta MNP$ ($\sim \Delta ABC$)

Apunte 14

© NELSON LILLO TERÁN
Junio 2017
http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588

ALTURA

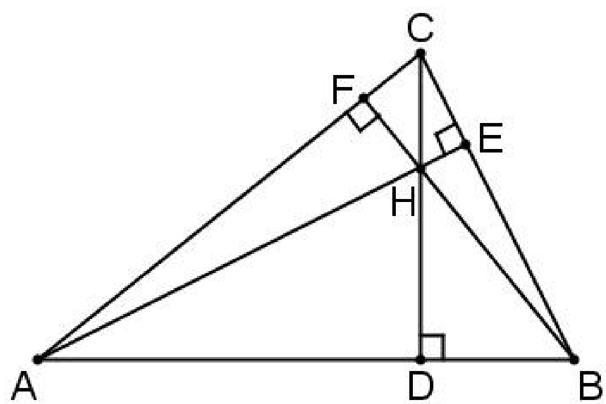
Definición

Altura de un triángulo es el segmento trazado perpendicularmente desde un vértice de ese triángulo a su lado opuesto (o recta que contiene a ese lado).

En cada triángulo, sus tres alturas se interceptan en un y sólo un punto llamado *ortocentro*, el cual se encuentra

- en el interior del triángulo, si y sólo si el triángulo es acutángulo.
- en el vértice del ángulo recto, si y sólo si el triángulo es rectángulo.
- en el exterior del triángulo, si y sólo si el triángulo es obtusángulo.

Ejemplo: en la figura siguiente se muestran las alturas del Δ ABC y el ortocentro (H) .



Alturas : $\overline{AE}$, $\overline{BF}$ y $\overline{CD}$

Ortocentro : H

Teorema

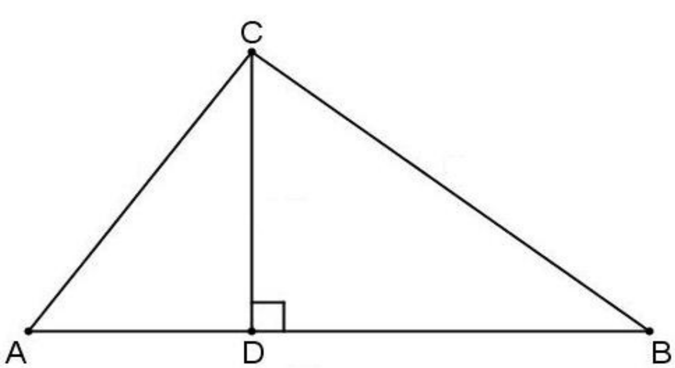
En cada triángulo, el producto de las longitudes de cada altura y su lado respectivo es constante.

Ejemplo: en la figura anterior $CD \times AB = AE \times BC = BF \times AC$.

Apunte 15

PERÍMETRO Y ÁREA

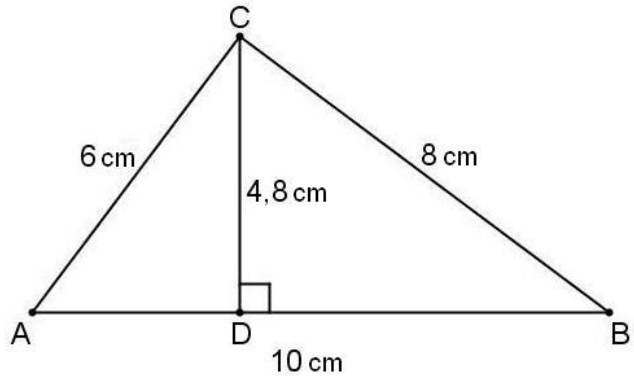
A continuación se entregan las fórmulas para calcular el perímetro y área del triángulo:



Perímetro del Δ ABC $= AB + BC + CA$

Área del Δ ABC $= \dfrac{AB \times CD}{2}$

Ejemplo: en la figura siguiente se muestra un triángulo con sus medidas lineales y los cálculos de su perímetro y área.



$AB = 10\ cm \quad BC = 8\ cm \quad CA = 6\ cm \quad CD = 4,8\ cm$

$$\text{Perímetro del } \Delta\ ABC = 10\ cm + 8\ cm + 6\ cm = 24\ cm$$

$$\text{Área del } \Delta\ ABC = \frac{10\ cm \times 4,8\ cm}{2} = 24\ cm^2$$

Apunte 16

Apunte 17

Teoremas sobre triángulos semejantes

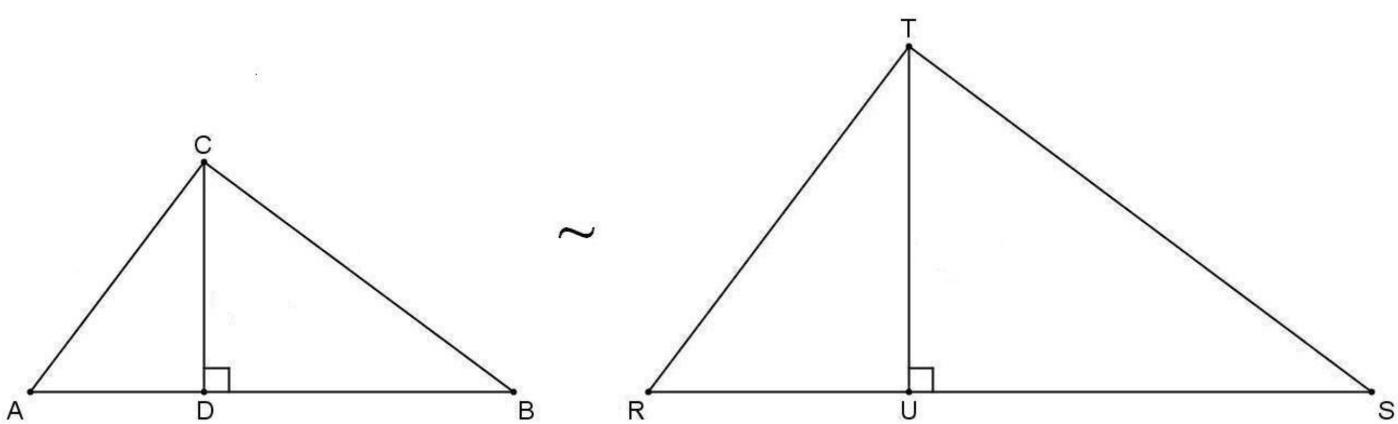
Dados dos triángulos semejantes, sus trazos correspondientes están en una misma razón, sus perímetros están en esa misma razón y sus áreas lo están al cuadrado de dicha razón.

Ejemplo: en la figura que se da a continuación, se cumple lo siguiente

$$\frac{AB}{RS} = \frac{BC}{ST} = \frac{CA}{TR} = \frac{CD}{TU}$$

$$\frac{\text{Perímetro del } \Delta\ ABC}{\text{Perímetro del } \Delta\ RST} = \frac{AB}{RS}$$

$$\frac{\text{Área del } \Delta\ ABC}{\text{Área del } \Delta\ RST} = \left(\frac{AB}{RS}\right)^2$$



TRIÁNGULO ISÓSCELES

Definición

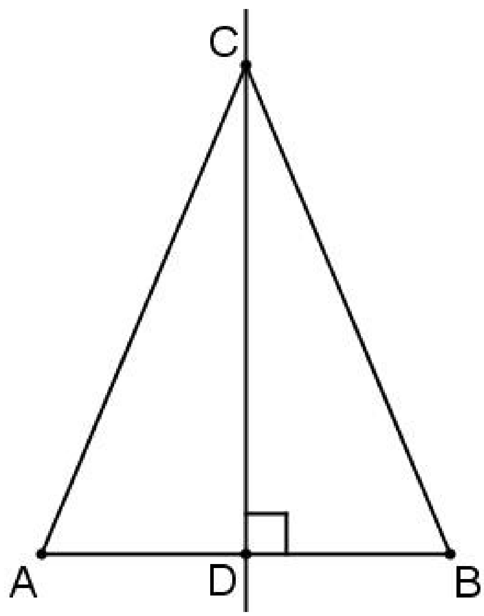
Triángulo isósceles es aquel que tiene dos lados congruentes. El tercer lado se denomina base.

Teoremas

Teorema: en cada triángulo isósceles sus ángulos basales son congruentes.

Teorema: en cada triángulo isósceles, la simetral, la altura y la transversal de gravedad son colineales entre sí y a la bisectriz del ángulo opuesto a esa base.

Ejemplo: en la figura siguiente se muestra un triángulo isósceles y las propiedades mencionadas anteriormente.



$AC = BC$

$\angle CAB \cong \angle CBA$

D : Punto medio de $\overline{AB}$

$\overleftrightarrow{CD}$: Simetral

$\overrightarrow{CD}$: Bisectriz de $\angle ACB$

$\overline{CD}$: Altura y transversal de gravedad

Junio 2017
http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588

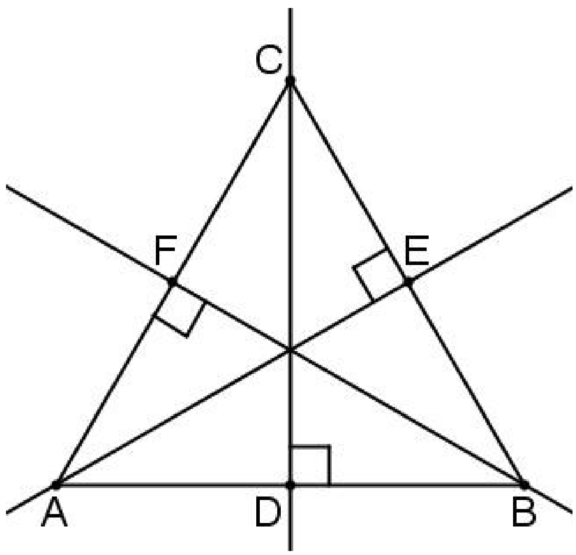
TRIÁNGULO EQUILÁTERO

Definición

Triángulo equilátero es aquel que tiene sus tres lados congruentes. Cada uno de sus ángulos interiores mide 60º y cada uno de sus ángulos exteriores mide 120º.

Teorema: en cada triángulo equilátero, las alturas son congruentes entre sí, son congruentes y colineales con las transversales de gravedad trazadas al mismo lado, y además son colineales con las simetrales y bisectrices respectivas.

Ejemplo: en la figura siguiente se muestra un triángulo equilátero con sus alturas, transversales de gravedad, bisectrices y simetrales. Además se exponen las propiedades ya mencionadas.



$AB = BC = CA$

$\angle BAC \cong \angle CBA \cong \angle ACB \quad (= 60^\circ)$

D, E y F: Puntos medios de los lados respectivos

$\overleftrightarrow{AE}$, $\overleftrightarrow{BF}$ y $\overleftrightarrow{CD}$: Simetrales

$\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BF}$ y $\overrightarrow{CD}$: Bisectrices de los ángulos respectivos

$\overline{AE}$, $\overline{BF}$ y $\overline{CD}$: Alturas y transversales de gravedad

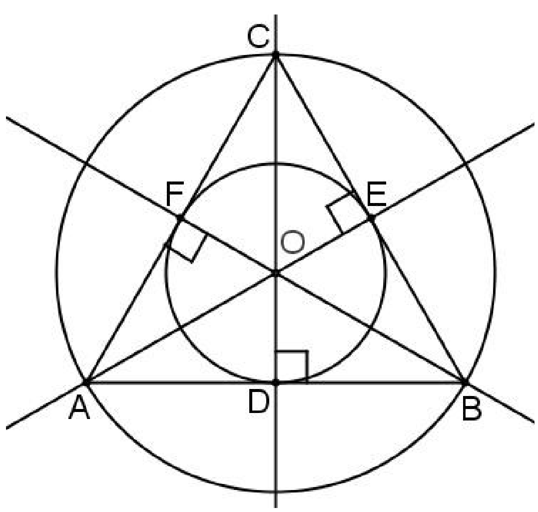
$AE = BF = CD = \dfrac{AB}{2}\sqrt{3}$

$\text{Perímetro} = 3\,AB$

$\text{Área} = \dfrac{(AB)^2}{4}\sqrt{3}$

Teorema: en cada triángulo equilátero, las circunsferencias inscrita y circunscrita, son concéntricas.

Ejemplo: en la figura siguiente se muestra un triángulo equilátero y sus circunsferencias, inscrita y circunscrita.



$AB = BC = CA$

$\angle BAC \cong \angle CBA \cong \angle ACB \quad (= 60^\circ)$

D, E y F: Puntos medios de los lados respectivos

$\overleftrightarrow{AE}$, $\overleftrightarrow{BF}$ y $\overleftrightarrow{CD}$: Simetrales

$\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BF}$ y $\overrightarrow{CD}$: Bisectrices de los ángulos respectivos

O: Incentro y circuncentro

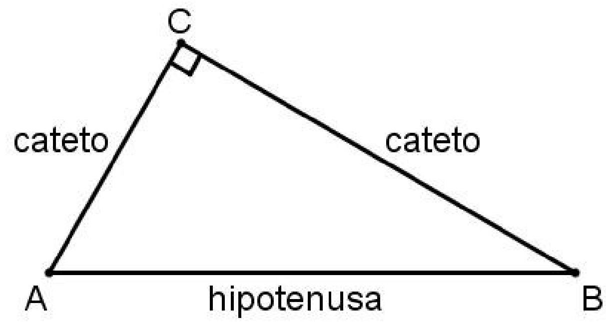
http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588

TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Definición

Triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo recto (90º) . El lado opuesto al ángulo recto se denomina hipotenusa y los otros dos, catetos.

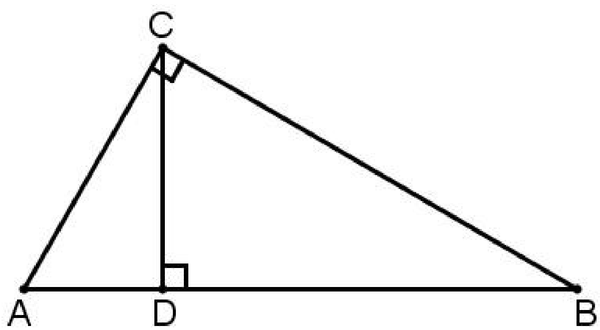
Ejemplo: en la figura siguiente se muestra un triángulo rectángulo, sus catetos e hipotenusa.



Proyecciones

En cada triángulo rectángulo, al trazar la altura a la hipotenusa, se determinan las proyecciones de cada cateto a ella.

Ejemplo: en la figura siguiente se muestra un triángulo rectángulo y las proyecciones de sus catetos sobre la hipotenusa.



$\overline{AB}$: Hipotenusa

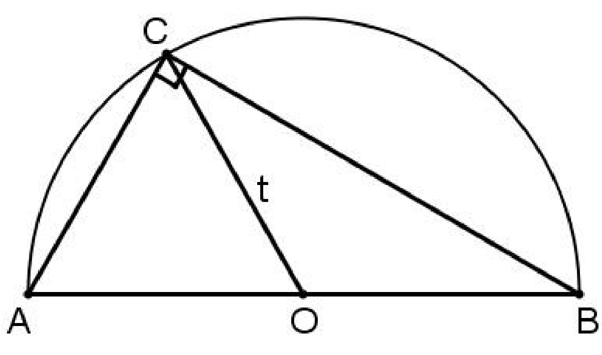
$\overline{CD}$: Altura a la hipotenusa

$\overline{AD}$: Proyección del cateto $\overline{CA}$ sobre la hipotenusa

$\overline{DB}$: Proyección del cateto $\overline{BC}$ sobre la hipotenusa

Teorema: cada triángulo rectángulo está inscrito en una semicircunsferencia. Por lo tanto, la transversal de gravedad trazada desde el vértice del ángulo recto al punto medio de la hipotenusa, mide la mitad de ella.

Ejemplo: en la figura siguiente se muestra un triángulo rectángulo inscrito en su semicircunsferencia.



O: Centro de la semicircunsferencia circunscrita

$\overline{AB}$: Hipotenusa

$\overline{CO}$: Transversal de gravedad

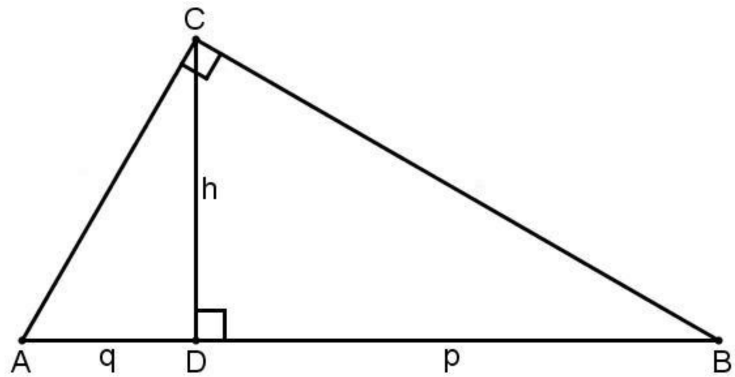
$$CO = \frac{AB}{2}$$

© NELSON LILLO TERÁN
Junio 2017
http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588

Teoremas de Euclides

Teorema: en cada triángulo rectángulo, la medida de la altura a la hipotenusa es media proporcional geométrica de las medidas de las proyecciones de los catetos sobre ella.

Ejemplo: en la figura siguiente se expone lo dicho en el teorema.



$CD = h$

$AD = q$

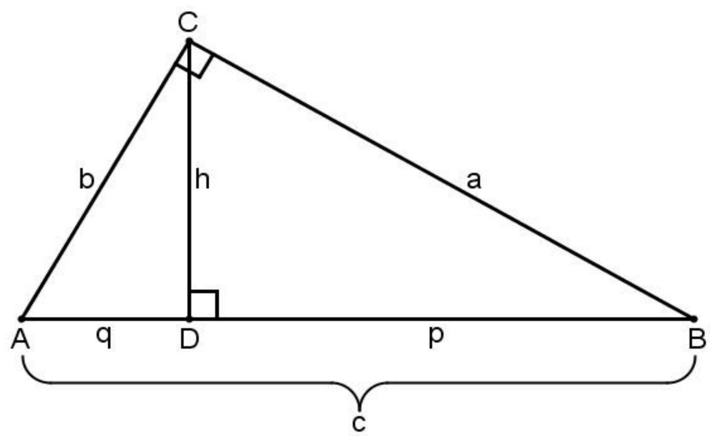
$BD = p$

$h^2 = p\,q$

Apunte 18

Teorema: en cada triángulo rectángulo, el cuadrado construido sobre cada cateto es equivalente al rectángulo construido por la hipotenusa y la proyección de ese cateto sobre ella.

Ejemplo: en la figura siguiente se expone lo dicho en el teorema.



$BC = a$

$CA = b$

$AB = c$

$AD = q$

$BD = p$

$a^2 = c\,p$

$b^2 = c\,q$

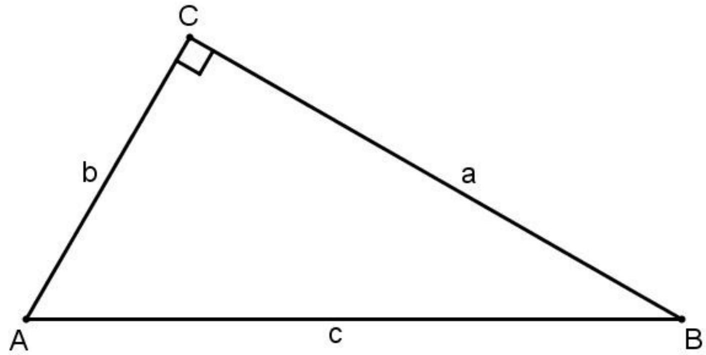
Apunte 19

Junio 2017
http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588

Teorema particular de Pitágoras

Teorema: en cada triángulo rectángulo, el cuadrado construido sobre la hipotenusa es equivalente a la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos.

Ejemplo: en la figura siguiente se expone lo dicho en el teorema.



$BC = a$

$CA = b$

$AB = c$

$a^2 + b^2 = c^2$

Apunte 20

BIBLIOGRAFÍA

Triángulo (curso interactivo en línea con examen incluido).

Junio 2017
http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588