MATEMÁTICAS 6° PERIODO 2

TEORIA DE CONJUNTOS

Durante toda la evolución de las ciencias, clasificar cosas con las mismas características o que cumplan las mismas condiciones, ha sido una estrategia fundamental para organizar y manipular información de la forma más eficazmente posible.

Desde luego los conocimientos matemáticos no se escapan a esta necesidad, empezando con el hecho de que todos los números utilizados en el día a día están clasificados según unas características propias. Entre estas clasificaciones se encuentran: el conjunto de los números naturales, el conjunto delos números enteros, entre otros.

Definiciones y conceptos básicos.

- Un conjunto es una reunión o agrupación de elementos que tienen una o más características en común. Los conjuntos son nombrados con letras mayúsculas y los elementos encerrados con una línea cerrada a la cual se le llama diagrama, o colocando los elementos entre llaves separados por comas.

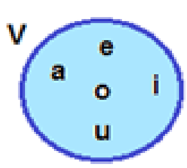
Ejemplo:

Representar el conjunto de las vocales

Solución

Hay dos formas usuales de representar los conjuntos, con diagramas de Venn o con llaves, a continuación se presentan estas dos formas.

Con Diagrama de Venn



Con Llaves

V = {a, e, i, o, u}

AL representar un conjunto mediante llaves, esto se puede hacer a la vez de dos maneras, por compresión y por extensión:

Por compresión: cuando se menciona la característica o propiedad común a todos los elementos del conjunto.

Por extensión: cuando se nombra uno a uno los elementos del conjunto

Ejemplo

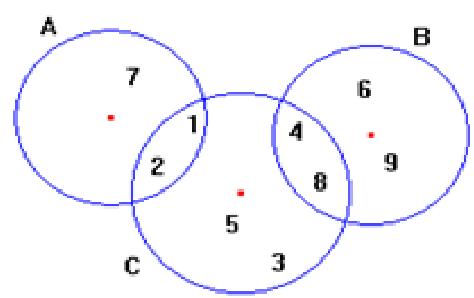
Representar el conjunto de los dígitos pares (P).

Por compresión: …… P = {Números dígitos pares}
Por extensión: …… P = {0, 2, 4, 6, 8}…

- . El símbolo para denotar que un elemento pertenece a un conjunto es "$\in$" y para la no pertenencia "$\notin$". De otro lado, el símbolo para denotar que un conjunto está completamente incluido dentro de otro es "$\subset$" y para denotar que no está incluido "$\not\subset$"

Ejemplo

Teniendo en cuenta el siguiente diagrama determine cuáles de las afirmaciones son verdaderas y cuales son falsas.



a) 7 $\in$ A　　　b) 4 $\in$ B
c) 6 $\notin$ B　　　d) 1 $\subset$ C
e) 8 $\notin$ A　　　f) B $\subset$ A

Operaciones con conjuntos

Actividad diagnóstica
Escribir posibles sinónimos, ejemplos, definiciones o algo relacionado con las palabras: unir, intersectar, completar y diferenciar.

Algunos posibles aportes son los siguientes

Unir: juntar, reunir, agrupar

Intersectar: encontrarse en alguna parte, cruzarse
¿Si dos carreteras se cruzan a cuál de las dos pertenece el cruce?

Diferenciar: señalar cosas diferentes, lo que el otro no tiene.

Complementar: lo que le hace falta para completar algo, lo que le falta para llenar algo

Al igual que con los números podemos hacer operaciones entre ellos y nos da otro número con los conjuntos también podemos hacer operaciones y nos dará otro conjunto. Las operaciones que se pueden realizar con conjuntos son: unión, intersección, complemento y diferencia.

UNION

La unión de dos conjuntos A y B es la agrupación de los elementos de ambos conjuntos en un sólo conjunto, sin repetir elementos. Se simboliza A u B

Ejemplo
Dado los conjuntos:
A = {múltiplos de 2 hasta el 12}
B = {múltiplos de 3 hasta el 12}

a) Represente por extensión el conjunto A u B
b) Hacer la representación gráfica

Solución parte a

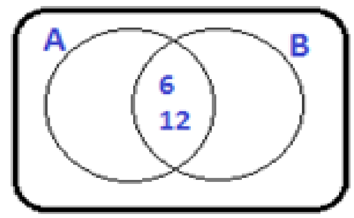
A = {2, 4, 6, 8, 10, 12}
B = {3, 6, 9, 12}

A u B = {2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12}.

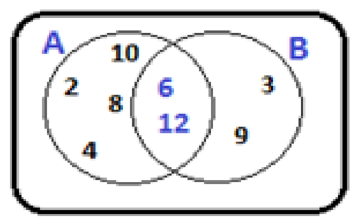
Solución parte B

Para hacer la representación gráfica se sugieren los siguientes pasos:

- Identificar cuáles son los elementos comunes a ambos conjuntos y colocarlos en la intersección de los círculos.

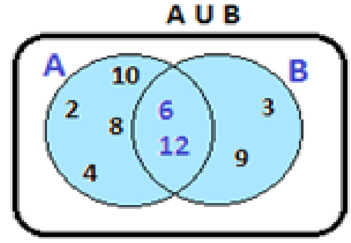


- Colocar los elementos que faltan en sus respectivos conjuntos teniendo en cuenta que no se pueden colocar los ya colocados en la intersección.



Para representar la unión de dos conjuntos gráficamente se pintan o sombrean los dos conjuntos en cuestión.

A U B



INTERSECCIÓN

La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos comunes a ambos conjuntos, esto es, que están en ambos conjuntos. Se simboliza A ∩ B

Ejemplo

Dados los conjuntos

A = {1, 3, 5, 6}　　y　　B= {1, 2, 3, 4}

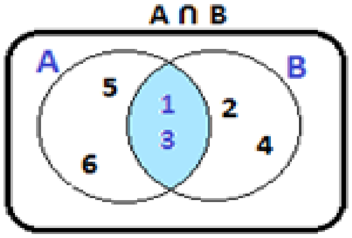
a. Hallar A ∩ B
b. Representar A ∩ B en un diagrama de Venn

Solución parte a
Los elementos comunes o repetidos de los conjuntos en cuestión son

A ∩ B = {1, 3}

Solución parte b
Se colocan en el medió de los dos diagramas los elementos comunes y se sombrean para representar que esta es precisamente la intersección. Luego se colocan el resto de los elementos que completan cada conjunto.

A ∩ B



DIFERENCIA

La diferencia de un conjunto A con respecto a otro conjunto B, son todos los elementos del conjunto A que son diferentes o que no pertenecen al conjunto B. Se simboliza A - B.

Tenga en cuenta que A – B (lo que tiene diferente A) no es lo mismo que B – A (Lo que tiene diferente B)

Ejemplo

Dado los conjuntos

A = {a, b, d, f, h, e}　　y
B = {a, e, i, o, u}

a) Hallar el conjunto A - B
b) Hacer representación gráfica.

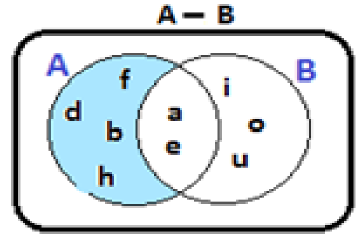
Solución parte a

A – B = {b, d, f, h}　　son los elementos diferentes que tiene A respecto al conjunto B

Solución parte b

Para la representación gráfica, se llenan los conjuntos como en los procesos anteriores y se sombrea la parte del conjunto A sin incluir la intersección.

A – B



Queda como ejercicio al estudiante hallar B - A

COMPLEMENTO

El complemento de un conjunto A respecto al total de elementos en cuestión denotado como conjunto universal **U**, es lo que le falta al conjunto A para completar el universal, en otra palabra los elementos que no tiene o no están en el conjunto A. Se simboliza **A`**

Ejemplo

Dados los conjuntos

U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
A = {0, 2, 4, 6, 8}

Hallar A` y su representación gráfica.

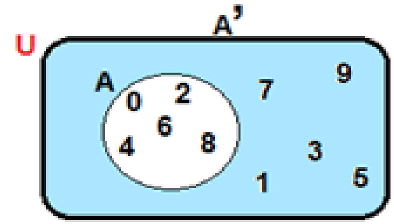
Solución

El complemento de B es lo que le hace falta al conjunto B para completar el conjunto "U"

A` = {3, 5, 7, 9}

Representación gráfica
Se deben sombrear los elementos que le hacen falta al conjunto A para completar el universal, esto es lo que está por fuera del conjunto A.

A'



Aplicaciones de la teoría de conjuntos

Una de las aplicaciones más usuales que se le da a la teoría de conjuntos es para representar situaciones de la vida real en donde se relacionan dos o más conjuntos.

Ejemplo 1

El profesor de educación física aprovecha la primer clase que tuvo con sus alumnos para indagar cuales son los deportes que les gusta practicar y obtuvo la siguiente información

27 les gusta practicar fútbol

13 les gusta practicar baloncesto

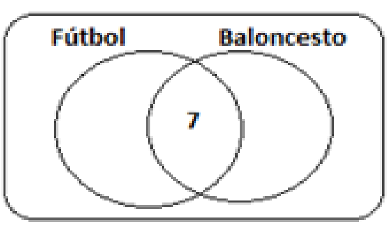
7 estudiantes les gustan practicar ambos deportes

8 estudiantes no les gustan los deportes.

Representar la siguiente situación mediante un diagrama de Venn y hacer inferencias a partir de su interpretación.

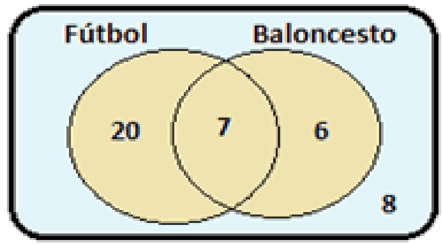
Solución

Para representar dos conjuntos mediante diagramas de Venn se inicia siempre ubicando los elementos que pertenecen a la intersección de los conjuntos, esto es, los que les guste practicar ambos deportes, que son 7 estudiantes.



Posteriormente se terminan de completar los elementos faltantes de cada conjunto.
Como los que les gusta el fútbol son 27 de los cuales ya se señalaron 7, quedarían faltando 20. De igual forma para completar los 13 estudiantes de los que les gusta el baloncesto harían falta 6.

Por último los que no pertenecen a ninguno de los dos conjuntos, se colocan en cualquier parte por fuera de los conjuntos, en este caso 8.



Interpretación del diagrama de Venn

Además de la información dada inicialmente se puede inferir que

- Se encuestaron en total 41 estudiantes
- De los 27 estudiantes que prefieren el fútbol, a 20 les gusta sólo fútbol.
- De los 13 estudiantes que les gusta el baloncesto, 6 prefieren sólo baloncesto.

Para hallar el porcentaje de algún subconjunto se puede utilizar la regla de tres o la conversión de fracción a porcentaje. A continuación se presenta un ejemplo de este proceso hallando el porcentaje de estudiantes que les gusta sólo un deporte

Como son 26 personas que les gusta sólo un deporte, para pasar el valor en porcentaje se pueden seguir las siguientes estrategias.

Solución por regla de tres

100%   41 est.
X   26 est.

$$41x = 26 \times 100\%$$

$$x = \frac{26 \times 100\%}{41}$$

$$x = 63{,}4\%$$

Solución por conversión de fracción a porcentaje.

$$\frac{26}{41} \textit{ del total}$$

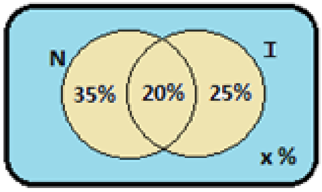
$$\frac{26}{41} \times 100\%$$

$$\frac{26 \times 100\%}{41}$$

$$63{,}4\%$$

Ejemplo 2

El grafico muestra el porcentaje de los 80 estudiantes del grado 11° de la institución F.M. que han viajado a nivel nacional e internacional.



a. ¿Cuántos estudiantes han viajado tanto a nivel nacional como internacionalmente? $N \cap I$

b. ¿Qué porcentaje de los estudiantes no han viajado ni a nivel nacional ni internacional? $(N \cap I)'$

c. ¿Cuántos estudiantes han viajado a alguno de los dos destinos, nacional o internacional? $N \cup I$

d. ¿Cuántos estudiantes han viajado a nivel nacional pero no internacional? $N \cap I'$

Solución parte a

Según el gráfico los estudiantes que han viaja tanto a nivel nacional como internacional (intersección) son el 20%.

Para hallar el 20% de los 80 estudiantes en cuestión se pueden utilizar varios métodos, entre los más usuales están los siguientes.

Solución por regla de tres

100% 80 est.
20% X est.

$$100x = 20 \times 80\%$$

$$x = \frac{20 \times 80}{100}$$

$$x = 16\, est.$$

Solución por conversión de porcentaje a fracción.

$$20\% \ \ de\ 80\, est.$$

$$\frac{20}{100} \times 80\, est.$$

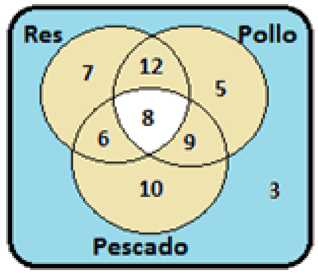
$$\frac{20 \times 80}{100}$$

$$16 \text{ est.}$$

Se deja como ejercicio los demás puntos pues se realizan de forma similar.

Ejemplo 3

Don Darío quiere montar un restaurante en el barrio donde vive, para lo cual hace una encuesta al azar a un grupo de habitantes del barrio sobre el tipo de carne que generalmente consumen y el resultado se muestra en el siguiente gráfico.



¿Qué inferencias se pueden hacer del gráfico?

Solución

Las inferencias que se pueden realizar del grafico mirando a que conjuntos pertenece cada número o a cual no pertenece, son las siguientes:

- A 7 personas les gusta sólo la carne de res
- A 33 personas les gusta la carne de res.
- A 8 personas les gusta las tres carnes
- A 12 personas les gusta la carne de res y la de pollo pero no la de pescado.
- La carne que menos les gusta a los encuestados es el pescado.
- La carne que más les gusta es la de pollo.
- En total se encuestaron 60 personas

La interpretación de los números o partes de los conjuntos que no se analizaron se deja como ejercicio al estudiante. Adicionalmente deben hallar el respectivo porcentaje para cada parte y hacer este mismo diagrama pero con porcentajes.

TEORÍA DE NÚMEROS

Números primos y compuestos

Un número es primo si sólo se puede dividir por el número uno y por sí mismo, esto es, si tiene exactamente sólo estos dos divisores.

Aquellos números que tengan otros divisores diferentes adicionales, se conocen como números compuestos.

Practica:

1. Escribir los números compuestos hasta el 50

2. Escoger un número entre 60 y 70 y expresarlo como la suma de
a. Dos números primos
b. tres números primos

3. Escriba falso o verdadero según corresponda

a. Todo número primo mayor de 2 es impar
b. Todo número compuesto es divisible por dos
c. El número 571 no es compuesto ni primo

4. ¿Qué número primo tiene dos dígitos que sumados dan 14?

Múltiplos de un número

Los múltiplos de un número determinado, son todos aquellos que resultan de multiplicar dicho número por cada uno de los números naturales, por decirlo de alguna manera más simple, sería la tabla de multiplicar de dicho número sin tener en cuenta un fin.

Ejemplo

Los múltiplos del número 15 son

$$M_{15} = \{15, 30, 45, 60 \ldots\}$$

Divisores de un número

Los divisores de un número, es el conjunto formado por todos los números por los que es posible dividir dicho número exactamente.

Ejemplo

Determinar los divisores del número 15

Solución

Una forma de determinar los divisores de un número es empezar por el número divisor más pequeño posible que es el uno, e ir verificando uno por uno los demás números hasta llegar a la mitad del número en cuestión y se adiciona al final de la lista dicho número.

$$D_{15} = \{\boxed{1}, \cancel{2}, \boxed{3}, \cancel{4}, \boxed{5}, \cancel{6}, \cancel{7}, \boxed{15}\}$$

$$D_{15} = \{1, 3, 5, 15\}$$

Criterios de divisibilidad

Para evitar estar haciendo la división y verificar si es exacta o no, se pueden utilizar algunos criterios o estrategias para determinar si un número es divisible o no por cierto número. A continuación se presentan algunos de los criterios más utilizados.

Por 2	Si el número termina en digito par o cero. Ejemplo: **1250 , 10856**
Por 3	Si la suma de los digitos es múltiplo de tres. Ejemplo: **36, 13575**
Por 5	Si el número termina en digito cinco o cero. Ejemplos: **355, 480**
Por 7	Si el número formado al quitar el último dígito menos el último dígito multiplicado por dos es múltiplo de siete. Ejemplo: **203** porque 20 – 3 × 2 = 14 y 14 es múltiplo de siete.
Por 11	si al sumar los digitos en posición impar y restarles la suma de los dígitos en posición par da múltiplo de 11 o cero: Ejemplo: **231** ……. porque (2+1) – 3 = 0 **8085**……. porque (8+8)-(0+5) = 11

Practiquemos
Realiza el siguiente cuadro colocando SI o NO cumplen las reglas de divisibilidad indicadas.

	Div 2	*Div 3*	*Div 5*	*Div 7*
92				
113				
150				
193				
46				
1.298				

Teorema fundamental de la aritmética

"Todo número se puede descomponer en factores primos"

Para descomponer un número en sus factores primos se acostumbra por facilidad, empezar a utilizar los factores primos menores siguiendo un orden, primero mitad, después tercera, después quinta, etc. Aunque realmente el orden no importa ya que no afectará el resultado.

Ejemplo:
Descomponer en sus factores primos los números 36 y 60

Solución.
Una forma de descomponer un número en sus factores primos es, haciendo una raya vertical a la derecha del número y luego al lado derecho de la raya, se colocara el factor o el número que lo divida exactamente y al final debajo del número se colocará el resultado de la división.

Al resultado se le aplica el mismo proceso anterior y así se continuará sucesivamente hasta que el resultado sea 1.

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$36 = 2x2x3x3 = 2^2x3^2 \qquad 60 = 2x2x3x5 = 2^2x3x5$$

Actividad de aplicación

1. Descomponer cada uno de los siguientes números en sus factores primos.

a. 20 **b.** 70 **c.** 150 **d.** 564
e. 336 **f.** 90 **g.** 72 **h.** 210
i. 3200 **j.** 220 **k.** 300 **l.** 900

2. Completar los espacios en blanco

a. $\begin{array}{r|l} 102 & \_\_ \\ 51 & \_\_ \\ 17 & \_\_ \\ 1 & \end{array}$ **b.** $\begin{array}{r|l} \_\_ & 2 \\ \_\_ & 3 \\ \_\_ & 5 \\ \_\_ & 7 \\ 1 & \end{array}$ **c.** $\begin{array}{r|l} \_\_ & 5 \\ 25 & \_\_ \\ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \\ 1 & \end{array}$

d. $\begin{array}{r|l} \_\_ & 2 \\ 8 & \_\_ \\ & 2 \\ \_\_ & \_\_ \\ 2 & \\ 1 & \end{array}$ **e.** $\begin{array}{r|l} \_\_ & 2 \\ 50 & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \\ 1 & \end{array}$ **f.** $\begin{array}{r|l} 284 & \_\_ \\ 142 & \_\_ \\ & 71 \\ \_\_ & \\ 1 & \end{array}$

g. $\begin{array}{r|l} 729 & \_\_ \\ 243 & \_\_ \\ 81 & \_\_ \\ 27 & \_\_ \\ 9 & \_\_ \\ 3 & \_\_ \\ 1 & \end{array}$ **h.** Inventar un ejercicio similar.

3. Señale el error que se cometió al descomponer los siguientes números en sus factores primos.

a. $\begin{array}{r|l} 80 & 2 \\ 40 & 2 \\ 20 & 4 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$ **b.** $\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 3 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$ **c.** $\begin{array}{r|l} 30 & 5 \\ 6 & 3 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$ **d.** $\begin{array}{r|l} 63 & 7 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$

Aplicaciones de la descomposición en factores

Dentro de las aplicaciones más usuales de la descomposición en factores primos está la determinación de la raíz de un número, el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor.

Raíz de un número mediante factores primos

Para hallar la raíz de un número se aplica la siguiente propiedad de operaciones con raíces

$$\sqrt[n]{X^n} = X$$

Esto es, cuando un número (X) esta elevado a un determinado exponente (X^n) y a la vez operado por una raíz con el mismo índice que el exponente $\left(\sqrt[n]{X^n}\right)$, estas operaciones se cancelan entre sí por ser inversas, y queda el mismo número inicial (X)

El método consiste básicamente entonces, en formar potencias que tengan el mismo exponente que el índice de la raíz, estos es, si la raíz tiene índice 2, se debe agrupar la descomposición del número de a dos factores formando así potencias con exponente 2, para después eliminar los exponentes con la raíz y dejar los números solos.

Ejemplo 1

Hallar $\sqrt{144}$

Solución

Al descomponer el número 144 en sus factores primos se obtiene lo siguiente.

144	2
72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

Dentro de las muchas formas de expresar el número 144 en factores primos, está el agrupar la descomposición de este, de a dos factores (potencias con exponente 2), para poder cancelar el exponente con el índice de la raíz, esto es

$$\mathbf{144 = 2^2 \times 2^2 \times 3^2}$$

$$\sqrt{144} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 3^2}$$

$$\sqrt{144} = 2 \times 2 \times 3$$

$$\sqrt{144} = 16$$

Ejemplo 2

Hallar $\sqrt[4]{81}$

Solución

$$\sqrt[4]{81}$$

$$\sqrt[4]{3^4}$$

$$3$$

81	3
27	3
9	3
3	3
1	

Esto es, $\sqrt[4]{81} = 3$

Mínimo común múltiplo de dos o más números

El mínimo común múltiplo de dos o más números es el primer número que es múltiplo tanto de un número como del otro. Este se puede determinar de diferentes formas.

Una forma es hallando por separado los múltiplos de cada número y escogiendo de dichas listas, el primero que este en todas las listas.

Ejemplo

Determinar el m.c.m de los números 3 y 4

Solución método 1

Haciendo las listas de los múltiplos de cada número se obtiene.

M_3 = {3, 6, 9, **12**, 15, 18, 21, **24**, 27, 30, 33…}
M_4 = {4, 8, **12**, 16, 20, **24**, 28, 32, 36, 40, 44…}

De lo que se deduce que aunque hay varios múltiplos comunes en ambas listas (12,24, etc.), el menor de todos es el 12 y por tanto este es el m.c.m.

Solución método 2

Dicho método consiste en descomponer simultáneamente los números en cuestión en factores primos y multiplicar al final estos factores.

Para la descomposición se coloca al frente el número por el cual se va a dividir (mitad, tercera, etc.) y debajo de cada número los resultados de sus respectivas divisiones.

Si alguno de los números, no tiene división exacta se baja este mismo número y se inicia nuevamente el proceso junto con los que sí tuvieron, hasta que todo los resultados sean 1.

Para hallar el m.c.m. entre 6 y 8 se procede como sigue

Se descompone el número en factores primos.

8	6	2
4	3	2
2	3	2
1	3	3
1	1	

Se multiplican los factores primos entre si

m.c.m = 2 x 2 x 2 x 3 = 24

Aplicaciones del mínimo común múltiplo

Si dos eventos ocurren simultáneamente en un instante dado y se quiere saber cuándo volverán a ocurrir otra vez de forma simultánea, se utiliza el concepto de mínimo común múltiplo.

Ejemplo 1

Un atleta da una vuelta a una pista cada 160 segundos y otro compañero cada 120 segundos. Si los dos atletas están entrenando en la misma pista y salen de la línea de partida al mismo tiempo ¿A los cuántos segundos volverán a pasar juntos por la línea de partida?

Solución

Al pedir cuando vuelven a suceder simultáneamente dos eventos, se está pidiendo determinar el mínimo común múltiplo entre los números en cuestión.

En este caso se deberá hallar el m.c.m. entre 160 y 120 segundos.

160	120	2
80	60	2
40	30	2
20	15	2
10	15	2
5	15	3
5	5	5
1	1	

El m.c.m = 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 3 x 5 = 480 Seg.

En conclusión, si estos dos atletas salen juntos de la misma línea de partida, se vuelven a encontrar allí cada 480 Seg.

Si se quiere pasar este tiempo a minutos, se debe repartir dicho tiempo en grupos de 60 segundos, ya 60 segundos es lo mismo que 1 minuto.

4 8 0 | 60
0 0 8

Esto es, se vuelven a encontrar cada 8 minutos.

Ejemplo 2

De la estación del metro de Niquia salen buses para Girardota cada 15 minutos y para Copacabana cada 12 minutos. Si inician labores a las 4 a.m. del día

a. ¿Cada cuántos minutos saldrán de la estación, de manera simultánea, buses para ambos pueblos?

b. ¿A qué horas volverán a coincidir la salida de los buses de forma simultanea?

c. Hasta las 12 del día ¿Cuántas veces se han despachado buses de forma simultanea para estos dos pueblos?

Solución parte a.

El mínimo común múltiplo entre 12 y 15 es

12	15	2
6	15	2
3	15	3
1	5	5
1	1	

m.c.m = 2 x 2 x 3 x 5 = **60 minutos,**

Esto es, los buses salen juntos cada 60 minutos (cada hora).

Solución parte b
Cómo sale cada hora y empezaron a las 4 a. m., la próxima vez en coincidir será a las 5 a.m.

Solución parte c
Hasta las 12 m. serían 6 horas de trabajo, es decir, volverán a salir en 6 veces más de forma simultánea y contando la del inicio de la jornada, serían 7 veces en total.

Máximo común divisor entre dos o más números.

El máximo común divisor de dos o más números se refiere al mayor número que pude dividir estos números exactamente y se simboliza con las letras mayúsculas **M.C.D**

Un método para hallar el **M.C.D** consiste en descomponer los números de manera simultánea y multiplicar entre sí sólo los que son divisores de ambos números.

Ejemplo:

Hallar el M.C.D de 18 y 12

12	18	2*
6	9	2
3	9	3*
1	3	3
1	1	

Se indicará con una seña (asterisco) los divisores de ambos números y al final se multiplicaran estos factores comunes, para determinar el M.C.D.

M.C.D = 2 x 3 = 6

Si se quisiera hallar el mínimo común múltiplo de estos dos números, bastaría con multiplicar todos los factores primos comunes y no comunes de la descomposición realizada. Esto es.

m.c.m = 2 x 2 x 3 x 3 = 36

Aplicaciones del máximo común divisor

Se utiliza *cuando se quiere repartir o dividir varias magnitudes en partes iguales, pero del mayor tamaño posible y sin que falte ni sobre nada,*

Ejemplo 1

Se tienen dos barrillas de hierro de 8 y 12 metros respectivamente las cuales se deben partir en pedazos de la mayor medida posible, sin que sobre ni falte nada. ¿Cuál será esa medida? ¿Cuántos pedazos de varilla salen?

Solución

Para determinar la ***mayor medida posible exacta***, en que se pueden dividir ambas varillas, se halla el M.C.D entre sus medidas.

8	12	2*
4	6	2*
2	3	2
1	3	3
1	1	

M.C.D = 2 x 2 = 4

Lo cual representa que los pedazos de mayor medida posible que se pueden sacar de estas dos varillas son de 4 m.

De la varilla de 8 metros, se sacaran 2 pedazos
De la varilla de 12 metros se sacaran 3 pedazos.

En total se sacaran 5 pedazos de igual tamaño.

Ejemplo 2

Se requiere embaldosar una sala de 5 metros de largo (500 cm) y 4 metros de ancho (400 cm) con baldosas cuadradas.

a. Será posible embaldosar la sala con baldosas cuadradas de 40 cm, sin tener que partir baldosas.

b. Cuál sería la baldosa cuadrada de mayor tamaño posible con que se pudiera embaldosar esta sala sin necesidad de partir ninguna baldosa.

c. ¿cuántas baldosas se requerirían?

d. Si una baldosa cuesta 51800 ¿cuánto costaran las baldosas requeridas para embaldosar esta sala?

Solución parte a

Para saber si la baldosa cuadrada de 40 cm caben exactamente a lo largo de la sala, se divide el largo (500 cm) entre la medida de la baldosa (40cm) para verificar si el 40 cabe exactamente en el 500.

$$\begin{array}{r|l} 500 & 40 \\ \hline 100 & 12 \\ 20 & \end{array}$$

Como la división no dio exacta, significa que las baldosas de 40 cm de lado no cabrían exactamente en el largo de 500 cm. y por tanto no darían sin cortar las baldosas.

Solución parte b

Para determinar la medida de una baldosa que no requiera ser partida se requiere que esta quepa exactamente tanto a lo largo como a lo ancho.

Una baldosa cuadrada de 50 cm por ejemplo, cabria 10 veces a lo largo y 8 veces a lo ancho.

Pero se pide es el mayor tamaño posible, que quepa exactamente en estas dos medidas. ¿Será este el mayor tamaño posible?

Como se pide el mayor tamaño posible (máximo), que quepa en las dos medidas (divisor común) se debe utilizar el máximo común divisor entre estas dos medidas (500 cm y 400 cm)

$$\begin{array}{rr|l} 500 & 400 & 2^* \\ 250 & 200 & 2^* \\ 125 & 100 & 2 \\ 125 & 50 & 2 \\ 125 & 25 & 5^* \\ 25 & 5 & 5^* \\ 5 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & \end{array}$$

M.C.D = 2 x 2 x 5 x 5 = 100

Lo cual significa que la mayor medida que cabe tanto en 500 como en 400 es el número 100 y por ende la baldosa cuadrada de mayor tamaño posible que cabe exactamente en estas dos medidas es una de 100 cm de lado.

Solución parte c

Una de las posibles formas de determinar cuántas baldosas se requerirán para embaldosar esta sala sería mirar cuantas baldosas caben en una fila a lo largo de los 500 cm (5 baldosas) y cuantas filas de estas se pueden formar a lo ancho de los 400 cm (4 filas)

Ahora bien 4 filas de 5 baldosas cada fila serian

4 x 5 = 20 baldosas

Solución parte d

Como cada baldosa cuesta de 51800 pesos, las 20 baldosas costaran

$$\begin{array}{r} 51800 \\ \times 20 \\ \hline 00000 \\ 103600 \\ \hline 1036000 \end{array}$$

1.036.000 pesos