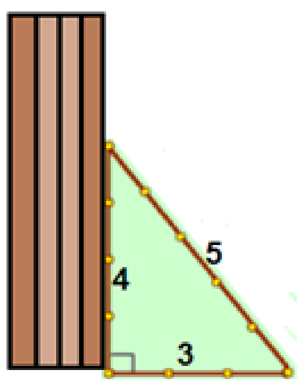
RAZONAMIENTO 10° PERIODO 1

Teorema de Pitágoras y simplificación de expresiones con radicales.

Uno de los primeros teoremas que se conocen en la historia de las matemáticas es el famoso teorema de Pitágoras, su importancia radica en que la altura es una medida esencial en el mundo cotidiano, por ejemplo, cualquier construcción que se haga debe construirse sobre una base vertical para que la fuerza de la gravedad no le haga perder el equilibrio y se derrumbe.

Según los historiadores las personas de la antigüedad para hacer construcciones perpendiculares tomaban un lazo, lo dividían en 12 partes iguales y formaban un triángulo que tenía cuatro partes en la base y tres en la altura o viceversa, pues esto les garantizaba que el triángulo formado era rectángulo, tal como se representa en la siguiente figura.



En sí, el teorema de Pitágoras plantea que la hipotenusa (lado opuesto al ángulo recto) que siempre va a ser el lado mayor, es igual a la suma de los cuadrados de cada uno de los otros lados denominados catetos.

En el caso anterior sería

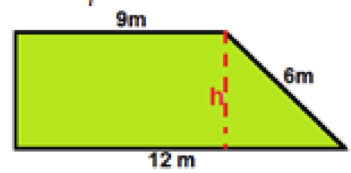
$$5^2 = 3^2 + 4^2$$
$$25 = 9 + 16$$
$$25 = 25$$

Lo cual efectivamente se cumple.

A continuación se presentarán algunas de las muchas aplicaciones que tiene este teorema.

Aplicaciones en áreas y perímetros.

En la figura se presenta un terreno que tiene forma trapezoidal.



a. Si el costo por metro cuadrado del terreno es de 80.000 ¿Cuál será el costo del terreno?

b. El terreno está cercado con tres cuerdas de alambre a su alrededor ¿Cuántos metros de alambre tiene el cerco?

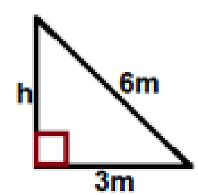
Solución parte a

El área del trapecio se puede hallar de varias maneras, una de ellas es hallar el área del triángulo y del rectángulo para luego sumarlas. Sin embargo para hallar el área de estas figuras se necesita conocer la altura, la cual es la misma para ambas.

Como el triángulo es rectángulo, se puede hallar la altura por medio del teorema de Pitágoras, teniendo en cuenta que la hipotenusa mide 6 metros y que la base (12 - 9) 3 metros.

$$(\text{Hipotenusa})^2 = (\text{cateto1})^2 + (\text{cateto2})^2$$

$$6^2 = 3^2 + h^2$$
$$36 = 9 + h^2$$
$$36 - 9 = h^2$$
$$27 = h^2$$
$$\sqrt{27} = \sqrt{h^2}$$



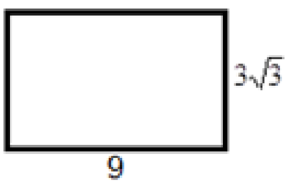
Descomponiendo el número del radicando en potencias cuadradas para cancelarlas o simplificarlas con la raíz cuadrada, se obtiene

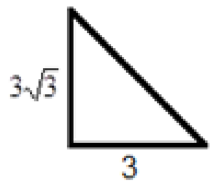
$$\sqrt{3^{\cancel{2}} \times 3} = \sqrt{h^2}$$
$$3\sqrt{3} = h$$

27	3
9	3
3	3
1	

27 = 3² x 3

El área de las figuras será entones.





Área del rectángulo

$$A = b \times h$$

$$A = 9 \times 3\sqrt{3}$$

$$A = 27\sqrt{3}$$

Área del triángulo

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

$$A = \frac{3 \times 3\sqrt{3}}{2}$$

$$A = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

Para sumar las dos áreas es conveniente convertir a fracciones homogéneas, para simplemente sumar los numeradores y dejar el mismo denominador.

$$\frac{\overset{54}{\cancel{27}}}{\underset{2}{\cancel{1}}}\sqrt{3} + \frac{9}{2}\sqrt{3}$$

$$\frac{63}{2}\sqrt{3}$$

El área es entonces $\frac{63}{2}\sqrt{3}$ m²

Para saber cuál es el costo total del terreno se multiplica el valor del metro cuadrado (80000) por la cantidad de metros cuadrados ($\frac{63}{2}\sqrt{3}$).

Costo = $80000 \times \frac{63}{2}\sqrt{3} = \frac{5040000}{2}\sqrt{3} = 2520000\sqrt{3}$

Utilizando calculadora se obtiene que el costo del terreno será de $4364768, 03

Solución parte b

Para hallar la medida de 3 cuerdas alrededor del terreno, primero se halla la medida de una cuerda (perímetro de la figura) y luego esta medida se multiplica por tres.

Perímetro = $12 + 3\sqrt{3} + 9 + 6 = 27 + 3\sqrt{3}$

Utilizando la calculadora una cuerda (perímetro) mide 32,19 metros por lo que las tres cuerdas alrededor medirían

32,20 x 3 = 96,60 metros

Aplicaciones en el plano cartesiano.

Para hallar una distancia horizontal o vertical, simplemente se halla la resta entre el mayor y el menor

Ejemplo la distancia entre 5 y 7 es (7 - 5) = 2.

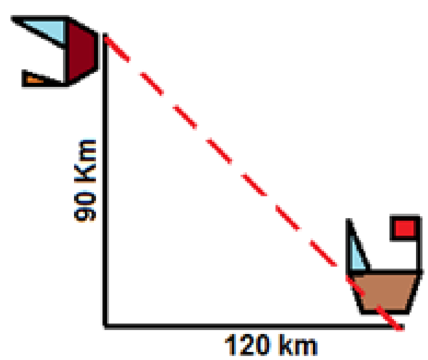
Para hallar distancias oblicuas se utiliza una combinación de las distancias horizontales y verticales mediante el teorema de Pitágoras.

Ejemplo:

Dos barcos parten de un puerto uno hacia el norte a 30 km por hora y otro hacia el oriente a 40 kilómetros por hora. Pasadas tres horas ¿qué distancia los separa?

Solución

En la gráfica se muestra la posición de estos barcos tres horas después de su partida.



Para determinar la distancia entre estos, que en este caso sería la hipotenusa, se utiliza el teorema de Pitágoras.

$$h^2 = 90^2 + 120^2$$
$$h^2 = 8100 + 14400$$
$$h^2 = 22500$$
$$\sqrt{h^2} = \sqrt{22500}$$

Utilizando la descomposición de factores, para expresar el número 22500 en potencias con exponente 2, de tal forma que después se puedan simplificar con el índice de la raíz, se obtiene lo siguiente.

22500	2
11250	2
5625	3
1875	3
625	5
125	5
25	5
5	5

$22500 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 5^2$

Reemplazando las potencias y simplificando se obtiene lo siguiente.

$$\sqrt{h^2} = \sqrt{22500}$$
$$h = \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 5^2}$$
$$h = 2 \times 3 \times 5 \times 5$$
$$h = 150$$

De lo que se deduce que la distancia que los separa, después de las tres horas de zarpar, es de 150 km.

Aplicaciones a la física
(Distancia y desplazamiento)

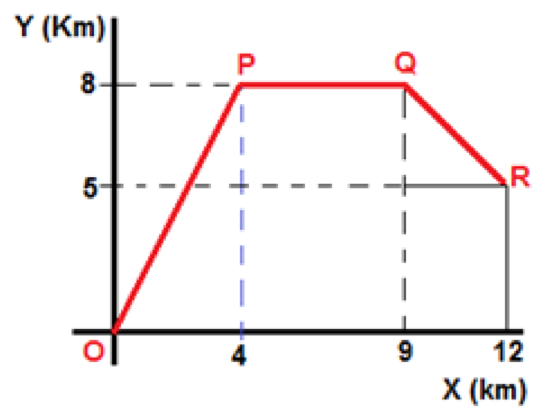
Aunque usualmente en el lenguaje cotidiano las palabras de desplazamiento y distancia se usan con el mismo sentido, desde la física, se hace una diferencia entre estos dos términos.

Se utiliza la palabra distancia para sumar las longitudes o medidas de cada uno de los diferentes trayectos que hace un objeto en movimiento, mientras que la palabra desplazamiento se utiliza para representar la distancia recta que hay desde el punto de donde inicio hasta el punto donde finalizo su recorrido, sin importar el trayecto seguido para llegar a este punto final.

Para hallar las distancias horizontales o verticales en un plano cartesiano, simplemente se resta el punto final menos el inicial, mientras que para hallar las distancias oblicuas se utiliza el teorema de Pitágoras.

Ejemplo

En la gráfica se representa el recorrido hecho por un auto que parte desde el origen, pasa por el punto P, sigue hasta el punto Q y finaliza en el punto R.



a. Determinar la distancia total recorrida por el objeto.

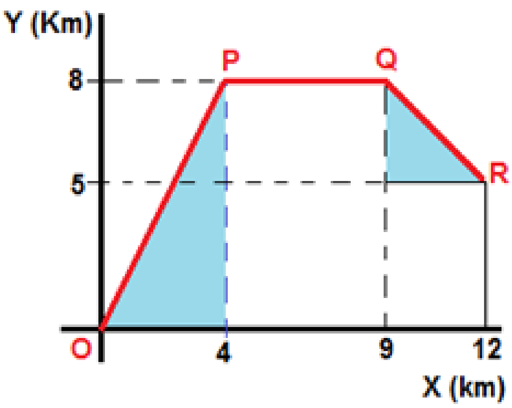
b. Determine el desplazamiento que realizó el objeto.

Solución parte a

Para hallar la distancia total recorrida se debe hallar por aparte, la distancia correspondiente a cada tramo realizado (OP, PQ y QR) y después sumar estas distancias.

La distancia de P a Q seria (9 – 4) = 5 km

Para hallar las distancias oblicuas de O a P y de Q a R, se debe utilizar el teorema de Pitágoras en cada caso, aprovechando el hecho de que todo segmento oblicuo se puede descomponer en un triángulo rectángulo, tal como se muestra en el siguiente gráfico.



Aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene

Para el recorrido OP

$$OP=\sqrt{4^2+8^2}$$
$$OP=\sqrt{16+64}$$
$$OP=\sqrt{100}$$
$$OP=10$$

Para el recorrido QR

$$QR=\sqrt{3^2+3^2}$$
$$QR=\sqrt{9+9}$$
$$QR=\sqrt{18}$$
$$QR=3\sqrt{2}$$

De donde la distancia total recorrida sería

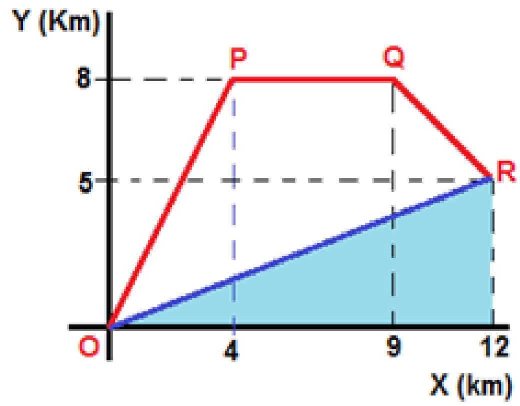
OP + PQ + QR

10 Km. + 5 Km. + $3\sqrt{2}$ 10 Km

($15 + 3\sqrt{2}$) KM.

Solución parte B

Para hallar el desplazamiento de O a R, se traza un segmento entre O y R, para a partir del triángulo rectángulo formado con este segmento, hallar la hipotenusa de este triángulo que sería el desplazamiento pedido.



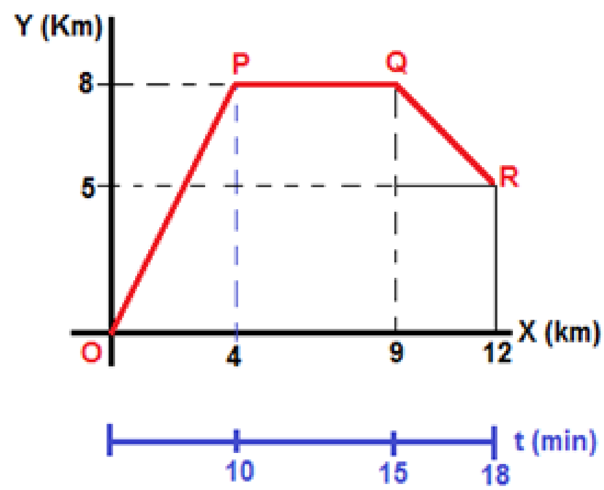
Como la base del triángulo mide 12 Km. y la altura 5 Km., utilizando el teorema de Pitágoras se obtiene lo siguiente.

$$OR=\sqrt{12^2+5^2}$$
$$OP=\sqrt{144+25}$$
$$OP=\sqrt{169}$$
$$OP=13$$

El desplazamiento desde O a P es de 13 Km.

Actividad complementaria

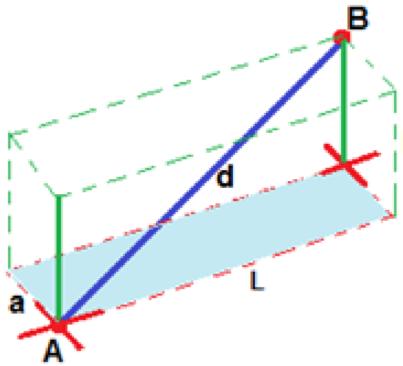
Debajo de la gráfica se coloca el tiempo que tardó en hacer cada tramo del recorrido.



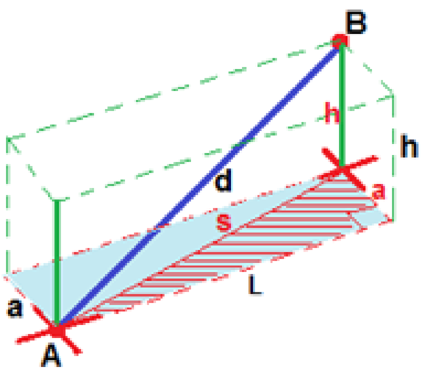
a. Determinar la velocidad en cada tramo del intervalo.
b. Determinar la velocidad media o promedio de todo el recorrido.

Distancia entre dos puntos del espacio

Así como en un segmento oblicuo en un plano cartesiano, al descomponerlo en sus componentes rectangulares, se forma un triángulo rectángulo, un segmento oblicuo (d) en el espacio forma siempre un prisma rectangular (caja), tal como se muestra a continuación.



Al trazar la diagonal (s) de la base del prisma, se forman dos triángulos rectángulos, uno en la base y otro perpendicular a este, entre la diagonal de la base (s), la diagonal del prisma (d) y la altura (h), tal como se ilustra a continuación.



Utilizando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo de la base se obtiene

$$s^2 = a^2 + L^2$$

Ahora bien, utilizando el valor hallado de s² en el otro triángulo rectángulo, se obtiene que

$$d^2 = s^2 + h^2$$

Y reemplazando el valor de s² se obtendría finalmente que la distancia (d), entre dos puntos en el espacio es:

$$d^2 = a^2 + L^2 + h^2$$

$$d = \sqrt{a^2 + L^2 + h^2}$$

Esto es, la diagonal mayor en un prisma triangular será la raíz cuadrada de, la suma de cada una de sus componentes (largo, ancho y altura) al cuadrado.

Si se sabe además que el ancho (a) del rectángulo será la diferencia entre las componentes x de los dos puntos en cuestión $(a = x_2 - x_1)$, el largo (L) del rectángulo la diferencia entre las componentes y $(L = Y_2 - Y_1)$ y la altura (h) la diferencia entre las componentes z $(h = Z_2 - Z_1)$, la distancia (d) entre dos puntos del espacio A(x_1, y_1, z_1) y B (x_2, y_2, z_2) es

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Ejemplo 1

Hallar la distancia (d) entre los puntos A$(-3, y-2,1)$ y B$(3,2,5)$

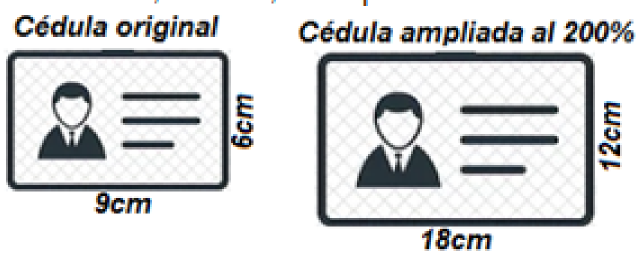
Solución

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$
$$d = \sqrt{6^2 + 4^2 + 4^2}$$
$$d = \sqrt{36 + 16 + 16}$$
$$d = \sqrt{68}$$
$$d = 2\sqrt{17}$$

Semejanza de figuras poligonales

Dos figuras o polígonos son semejantes si sus ángulos correspondientes son iguales o sus lados homólogos son proporcionales, esto es, que la relación entre dos lados homólogos cualquiera, de las dos figuras, sea siempre la misma.

Un ejemplo de figuras semejantes es cuando se saca una fotocopia de una cédula ampliada al 200%, lo cual indica que todos los lados se alargan en un 200%, esto es, se duplican.



Decir cuántas veces se alarga cada lado, se puede representar matemáticamente como cuántas veces cave una magnitud en la otra, lo cual se conoce como razón o fracción.

Matemáticamente se puede decir entonces, que dos figuras son semejantes, si sus ángulos correspondientes son iguales o si las relaciones o razones entre sus lados homólogos siempre es la misma.

Esta relación es conocida como razón de proporcionalidad e indica cuántas veces es más grande o más pequeña una magnitud que la otra, dependiendo si la magnitud mayor va en el numerador o en el denominador.

En el caso de la cédula y la fotocopia ampliada al 200%, si comparamos las relaciones entre los lados homólogos, como las cédulas son polígonos semejantes, las razones deben ser iguales.

$$\frac{Lado\ grande}{Lado\ pequeño},\ \frac{18}{9},\ \frac{12}{6}$$

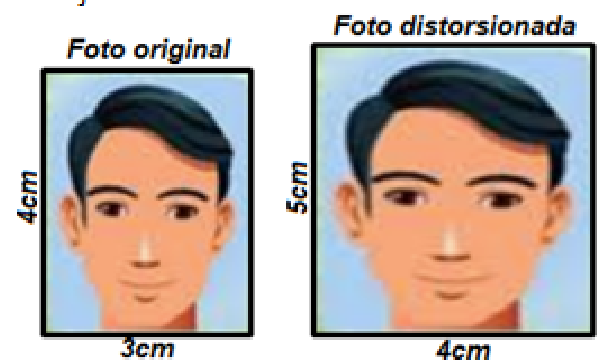
Al simplificar las diferentes fracciones formadas entre sus lados correspondientes se obtiene

$$\frac{2}{1},\ \frac{2}{1}$$

Como tiene la misma relación se puede concluir que los dos rectángulos son semejantes y si se hace la división (2/1=2) se deduce que el lado grande es 2 veces el pequeño.

En la cotidianidad es usual confundir que si dos figuras son parecidas entonces son semejantes y esto no necesariamente es cierto, pues para que sean semejantes deben cumplir que todos los lados homólogos de las dos figuras sean proporcionales. Un caso particular son las fotos cuando no se amplían en la misma razón, tanto el largo como el ancho.

Ejemplo 1: verificar si las dos fotos del gráfico son semejantes o no.



Analizando las relaciones entre sus lados correspondientes se obtiene

$$\frac{\mathit{Lado\ grande}}{\text{Lado pequeño correspondiente}},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4}$$

Como las fracciones no se pueden simplificar, al no ser iguales se deduce que las fotos no son semejantes.

Interpretamos más detenidamente cada relación se deduce lo siguiente.

La relación entre las bases es (4/3 = 1,33) esto es, la base de la figura grande es 1,33 veces más grande la base de la figura pequeña.

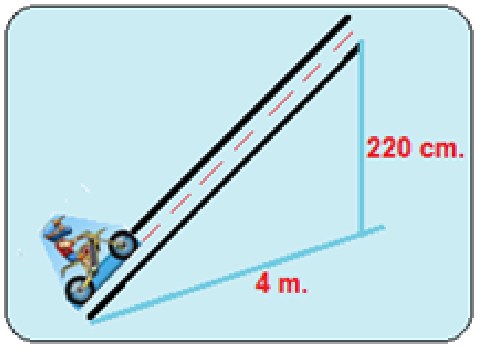
La relación entre sus alturas es (5/4=1,25) esto es, la altura de la figura grande es 1,25 veces más grande la base de la figura pequeña.

De lo que se deduce que las figuras no son semejantes por que no guardan la misma relación.

Nota: para que una foto no quede distorsionada se debe ampliar en el sentido de la diagonal y no se debe confundir ampliar en una misma cantidad, con sumar la misma cantidad, por ejemplo, sumar dos en todos los lados no es lo mismo que duplicar todos los lados.

Ejemplo 2 (paralelas en un triángulo)

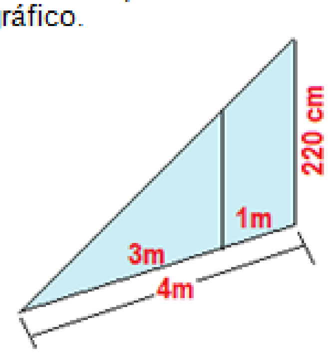
Un motociclista acrobático va a saltar en una rampa de 4 metros de base por 220 cm de altura, tal como se muestra en la figura.



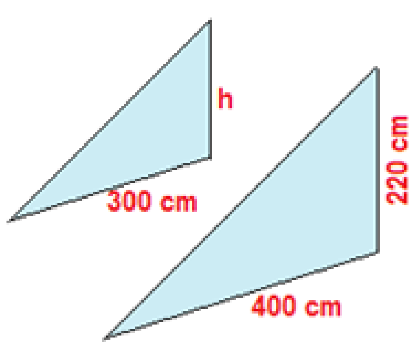
¿Cuál será la altura a la que se encuentra el motociclista cuando ha avanzado 3 metros respecto a la base?

Solución.

Si se traza un segmento perpendicular al piso a los tres metros del punto inicial, se obtendría el siguiente gráfico.



Si se divide el gráfico en dos triángulos expresando todo en centímetros, ya que no se pueden trabajar con unidades de medida diferentes, se obtiene lo siguiente



Como las alturas son paralelas entre sí, se forman dos triángulos semejantes, ya que cualquier paralela entre un triángulo siempre va a formar dos triangulo semejantes y por tanto los lados correspondientes son proporcionales entre sí, esto es guardan siempre la misma relación.

Los métodos generalmente utilizados para hallar proporcionalidad son razones o regla de tres.

Método razones

$$\frac{h}{220}=\frac{300}{400}$$

$$h=\frac{300\times 220}{400}$$

$$h=\frac{3\times 220}{4}$$

$$h=3\times 55$$

$$h=165$$

Método regla de tres

Base	Altura
300	h
400	220

$$h=\frac{300\times 220}{400}$$

$$h=165$$

Esto es, a los tres metros del punto de inicio de la rampla, la altura es de 165 cm, o lo que es lo mismo 1,65 metros.

Casos especiales de figuras semejantes

Homotecias

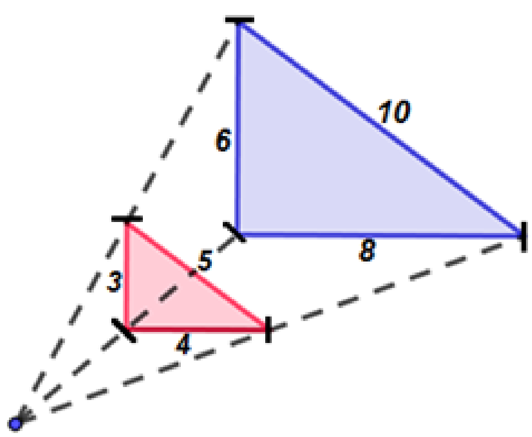
Es una transformación que se realiza a una figura inicial a partir de proyecciones sobre un punto llamado centro de la homotecia.

En otras palabras podemos decir que son figuras semejantes a una figura inicial, formada al hacer proyecciones desde un punto a cada uno de los vértices de la figura inicial. En donde cada proyección al vértice se prolonga en un factor o razón determinad y al trazar los puntos finales en cada proyección, se forma la nueva figura.

La figura transformada es semejante a la primera en el mismo factor de proporción trabajado para construir la figura, y sus lados homólogos respecto a la figura inicial siempre son paralelos entre sí.

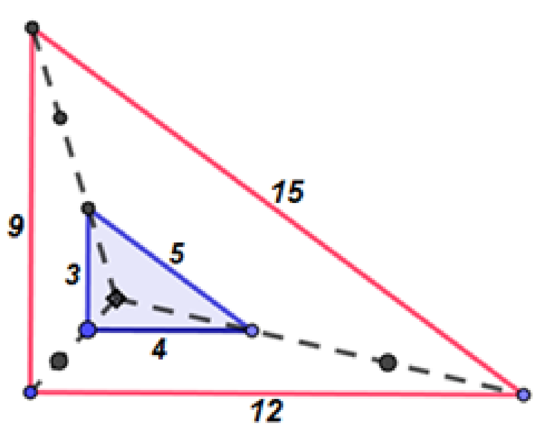
Ejemplo 1

Graficar una figura semejante al triángulo rectángulo dado (con lados 3, 4 y 5 unidades de longitud), a partir de un punto exterior del triángulo, con una razón de homotecia de 2.



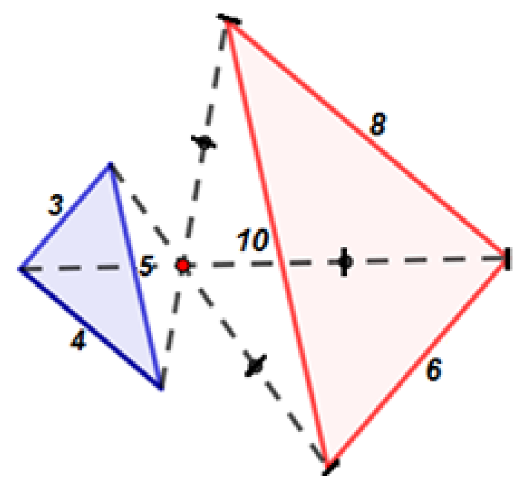
Ejemplo 2

Graficar una figura semejante al triángulo rectángulo dado (de 3, 4 y 5 unidades de longitud) ya no, partir de un punto exterior, sino de un punto interior, con una razón de homotecia de 3.



Ejemplo 3

Graficar una figura semejante al triángulo rectángulo dado (de 3, 4 y 5 unidades de longitud) a partir de un punto exterior y con una razón de homotecia de -2 (proyecciones a cada vértice desde un punto cualquiera, con el doble de longitud, pero al lado contrario)



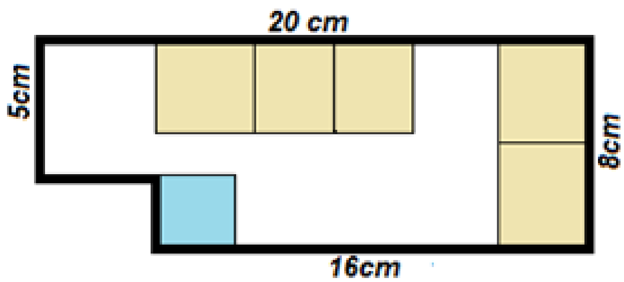
Relaciones entre figuras semejantes

Si dos figuras son semejantes, estableciendo la relación entre un par de lados correspondientes se puede hallar la relación entre las áreas de estas figuras, simple mente elevando la razón al cuadrado.

Lo anterior se puede explicar teniendo en cuenta que en las figuras en dos dimensiones (largo y ancho) al amplificarlas por un factor (r) tanto el largo como el ancho, en conjunto se amplificarían en un factor de ($r \times r = r^2$) donde r es la razón de semejanza entre los lados homólogos.

Ejemplo

En el gráfico se presenta un plano de la casa de doña Amparo y su distribución, según los registros de la curaduría.



Si en la realidad el largo de la casa es de 18 metros, esto es, 1800 cm. Cuál será el área real de la casa.

Solución

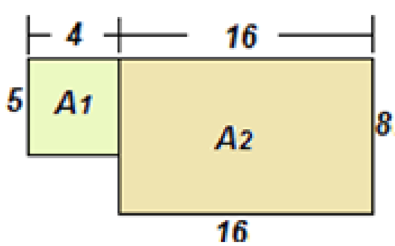
Como es un plano, las medidas reales deben ser proporcionales a las medidas del plano y como la figura en el plano y la figura real son semejantes se debe cumplir que la relación entre las áreas (Área real / área del plano) debe ser la misma que los lados homólogos de la parte real / plano, pero al cuadrado

$$\frac{\text{Área } real}{\text{Área del plano}} = \left(\frac{lado\,\text{real}}{\text{Lado del plano}}\right)^2$$

$$\frac{Areal}{Aplano} = \left(\frac{1800}{20}\right)^2$$

$$Areal = \left(\frac{1800}{20}\right)^2 Aplano$$

Para hallar el área del plano se divide el área en dos partes



El área de cualquier rectángulo es base por altura, luego se deduce que

$$A_1 = \frac{4cm \times 5cm}{2} = \frac{20}{2}cm^2 = 10cm^2$$

$$A_2 = \frac{16cm \times 8cm}{2} = \frac{128}{2}cm^2 = 64cm^2$$

$$A_{plano} = 10cm^2 + 64cm^2 = 74cm^2$$

Reemplazando en la relación establecida entre el área real y la del plano

$$Areal = \left(\frac{1800}{20}\right)^2 Aplano$$

$$Areal = \left(\frac{1800}{20}\right)^2 74$$

$$Areal = (90)^2\, 74$$

$$Areal = 8100 \times 74$$

$$Areal = 8100 \times 74$$

$$Areal = 591400\, cm^2$$

Queda como ejercicio al lector expresar 591400 cm^2 en m^2, teniendo en cuenta que 1m^2 es igual a 10000 cm^2.

Solución: 59,94 metros.