RAZONAMIENTO LÓGICO 8° PERIODO 1

Conjunto de los números racionales.

Debido a la necesidad del hombre por representar diferentes situaciones de la vida real que brindaran una mayor practicidad y facilidad para ellos, como saber cuántos animales se tenían, cuáles eran las ganancias de un negocio o actividad, etc. Se han inventado varios conjuntos numéricos que permiten dar cuenta de estas situaciones.

Inicialmente aparecieron los números naturales **(N)** utilizados para contar, luego con la necesidad para representar deudas y situaciones similares aparecieron los números negativos formando así el conjunto de los enteros **(Z)**

Z = {…-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3…}

Posteriormente, al ver la necesidad de representar todo mediante números diferentes a los enteros, ya que muchas cosas estaban fraccionadas, se inventaron los números racionales (Q) que son todos aquellos que se pueden expresar como una fracción o razón.

Los números fraccionarios (2/4, -3/2, etc.)
Los enteros (-6, 0, 5, $\sqrt{4}$, etc.)
Los decimales finitos (1.36, 0,24, etc.)
Los decimales infinitos periódicos. ($5,\overline{2}$)

APLICACIONES USUALES

Ejemplo 1
El profesor de matemáticas colocó una lista de números racionales para identificar cuál de ellos era el menor de todos y quien lo hiciera primero correctamente tendría una nota extra en el área.

La lista era la siguiente

$$\frac{5}{3},\quad 1.82,\quad 80\%,\quad -\frac{9}{3},\quad \sqrt{4}$$

¿Cuál será el número que le permitirá a un estudiante ganarse la nota extra?

Solución

Para comparar todos estos números se puede proceder a convertir todo a un mismo tipo número para poderlos comparar más fácilmente, el más usual es el decimal.

$\frac{5}{3}$,	1.82,	80%,	$-\frac{9}{3}$,	$\sqrt{4}$
1.67	1.82	**0.8**	- 3.0	2.0

Por tanto el número de menor valor o magnitud es el 80% que equivale en decimal a 0.8.

Nota: cuando se trabaja con un número irracional (raíz no exacta) se acostumbra convertir todos los números a raíz colocando cada número al cuadrado dentro de una raíz y después se pasan a decimal o a fracciones homogéneas.

Ejemplo 2

Aprovechando que en el éxito el televisor que me gusta tenía el 40% de descuento, compre el televisor pagando 3/5 del valor del televisor de contado y el resto a crédito. Si el televisor costaba inicialmente 1800000 sin el descuento ¿Cuánto se quedará debiendo?

Solución.

En este caso no se trabajará la solución por regla de tres o por gráficos, aunque también se podría hacer, sino por fracciones.

Como se rebaja un 40%, queda costando el 60% del total (60% de 1.800.000)

$$\frac{60}{100}\,de\,1800000 = \frac{60\times 1800000}{100} = 1.080.000$$

Como del nuevo precio rebajado paga 3/5, queda debiendo 2/5 de dicho precio.

$$\frac{2}{5}\,de\,1.080.000 = \frac{2\times 1.080.000}{5} = 432000$$

Solución de ecuaciones lineales con una incógnita

Partiendo del hecho de que no se pueden sumar o restar términos que no sean semejantes, es conveniente agrupar todos los términos con letra (incógnita) en un lado de la igualdad y todos los términos sin letra al otro lado, aplicando las propiedades de las igualdades. Aunque si se quiere, también se pueden juntar (sumar) en cada lado los términos semejantes entre sí, antes de hacer dicho proceso.

Después de agrupar términos semejantes en cada lado y sumarlos quedará un término con letra en un lado y un término sin letra en el otro.

Por último el coeficiente que acompaña a la letra o incógnita en un lado se elimina aplicando la operación inversa a ambos lados (dividiendo por dicho número ambos lados) o en su defecto pasando dicho número a dividir al otro lado.

Ejemplo 1:

Resolver la siguiente ecuación
$3x + 6 - 2x = 8 + 3x - 6$

Solución

I. Junto en cada lado los términos que se puedan juntar

$$1x + 6 = 2 + 3x$$

II. Como el resto de los números no os puedo juntar, organizo términos semejantes en cada lado aplicando operaciones inversas o cambiando de signo al cambiar de lado.

$$1x - 3x = 2 - 6$$

III. Junto términos semejantes a ambos lados

$$-2x = -4$$

IV. Para eliminar el término que está multiplicando lo paso a dividir al otro lado o le aplico la operación inversa.

$$X = \frac{-4}{-2} = +2$$

Si se quiere comprobar que la solución sea la correcta se remplaza la solución en cada parte donde este la variable x, verificando si da lo mismo en ambos lados de la igualdad.

$$3x + 6 - 2x = 8 + 3x - 6$$
$$3(2) + 6 - 2(2) = 8 + 3(2) - 6$$
$$6 + 6 - 4 = 8 + 6 - 6$$
$$8 = 8$$

Como cumple la igualdad significa que la solución es correcta.

Ejemplo 2

Voy a la tienda y compro un paquete de tostadas de 2500 y una bolsa de leche de 2100. Para lo cual pago con un billete de 10 000. Si x representa el dinero que se le debe devolver, cuál será el valor de x.

Solución de manera lógica

Paga por todos los productos 4600, por lo que le deben devolver el resto, es decir lo que le hace falta para completar los 10 000, que son 5400.

Solución de manera algebraica

Entre lo que debe pagar (4600) y lo que le devuelven (x) deben sumar 10000, esto es

$4600 + x = 10000$

Solucionando esta ecuación se obtiene
$X = 10000 - 4600$
$X = 5200$

Ejemplo 3

Una camisa que estaba en promoción se rebaja en un 20% y queda costando 46000 pesos. ¿Cuál era el costo inicial de la camisa?

Solución método 1 (por ecuaciones)

Sea x el costo inicial, que es el dato desconocido, entonces

Costo inicial – costo de la rebaja = 46000

x – 20% de x = 46000

$$x-\frac{20}{100}x=4600$$

Una forma de resolver ecuaciones con fracciones es convertirlas todas a homogéneas.

$$\frac{100}{100}x-\frac{20}{100}x=\frac{460000}{100}$$

$$100x-20x=460000$$
$$80x=460000$$
$$x=\frac{460000}{80}$$
$$x=57500$$

Solución método 2 (por regla de tres)

Como no se tiene el valor total, este 100% se le llama x.

100 %	X

Como se rebaja en un 20%, que es lo mismo que decir que queda costando un 80%, lo cual corresponde a 36000, la regla de tres completa quedaría

100 %	X
80%	360000

Resolviendo la regla de tres se obtiene

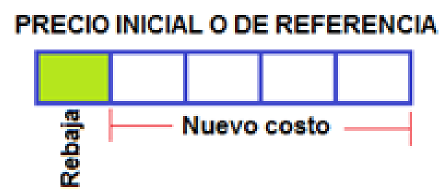
$$x=\frac{100\%\times 36000}{80\%}$$
$$x=57500$$

Solución método 3 (por fracciones)

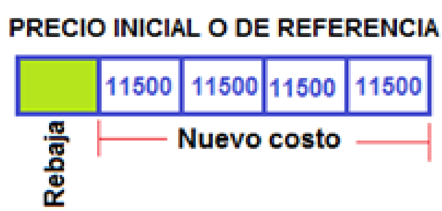
Cuando son porcentajes que al expresarlos como fracciones se pueden simplificar fácilmente, y que además son fáciles de representar gráficamente porque su denominador es relativamente pequeño, se puede utilizar dicho método ya que facilita mucho la interpretación de la situación.

Decir que la rebaja es un 20%, es lo mismo que decir que la rebaja fue de (20/100) o lo que es lo mismo después de simplificar que es 1/5 del valor inicial.

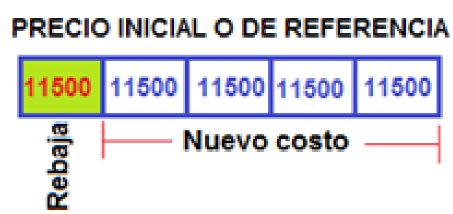
Representado la rebaja de 1/5 sobre el valor real y teniendo en cuenta que el costo original queda dividido en dos partes, la rebaja y el nuevo costo, se obtiene el siguiente gráfico.



Ahora bien, como el nuevo costo es 46.000 al repartir esta cantidad en los 4 cajones correspondientes al nuevo costo se obtiene (46000/4) 11500 por cada parte.



Como en una fracción todas las partes son iguales, el último cajón también vale 11500.



En conclusión el precio inicial de la camisa sería (11500 x 5) 57500 pesos.

Ejemplo 4

De la cantidad de dinero que tenía x, me gaste 3/4 de este y me quedaron 40000 ¿Cuánto dinero tenía?

Solución método 1 (por ecuaciones)

Para formular la ecuación puedo decir que

A lo que tengo le quito Tres cuartos y me Quedan 40000.

$$x-\frac{3}{4}x=40000$$

Amplificando al m.c.m

$$\frac{4}{4}x-\frac{3}{4}x=\frac{160000}{4}$$

Eliminando denominadores iguales

$$4x-3x=160000$$

$$x=160000$$

Lo que tenía es igual a lo que gaste más lo que me quedó.

$$x=\frac{3}{4}x+4000$$

Amplificando al m.c.m

$$\frac{4}{4}x=\frac{3}{4}x+\frac{160000}{4}$$

Eliminando denominadores

$$4x=3x+160000$$

$$4x-3x=160000$$

$$x=160000$$

Solución método 2 (por gráfico)

Una forma de representar los tres cuartos de lo que se gastó y con ello lo que sobró, es la siguiente.

Como lo que le sobró eran 40000

Al cada parte tener el mismo valor, las 4 partes serían 40000 x 4 = 160000.

Ejemplo 5

Hoy en cierta ciudad de los estados unidos la temperatura era de 40 grados Fahrenheit ¿Estará haciendo frió o calor?

Solución:

Como en nuestro país la temperatura usualmente se da en grados centígrados, para determinar si está haciendo calor, frio o es un clima cálido es conveniente convertir a esta unida d de medida.

Para hacer convertir de grados Fahrenheit a grados centígrados se utiliza la siguiente ecuación.

$$°C=\frac{5}{9}(°F-32)$$

Al reemplazar los 40 °F en la fórmula se obtiene

$$°C=\frac{5}{9}(40-32)=\frac{5}{9}(8)=\frac{40}{9}=4{,}4$$

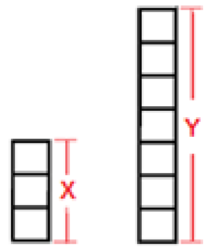
Como 40 °F equivalen a 4,4 °C, podemos decir que en dicho lugar está haciendo mucho frio.

Conjunto de los números irracionales

Fueron descubiertos, según la historia, por los pitagóricos al tratar de encontrar un método para relacionar los catetos de un triángulo rectángulo con su hipotenusa.

Una forma de relacionar dos cantidades o medidas mediante números racionales, es dividir la cantidad pequeña, en cierta cantidad de partes iguales, de tal forma que la cantidad grande también se pueda dividir exactamente en cierto número de estas mismas partes o medidas.

A continuación se presenta un ejemplo gráfico de cómo se pueden relacionar dos cantidades mediante una razón o fracción, para hacer más comprensible la idea.



La relación entre estas dos medidas es de 3 a 7 (3/7) lo cual significa que el pequeño es 3/7 del grande o viceversa, el grande es 7/3 del pequeño.

En la actualidad hay un ejemplo muy conocido de que dos cosas no se pueden relacionar mediante números racionales (las veces que cabe el diámetro de un círculo alrededor este). Después de mucho tiempo de estudio se ha llegado a la conclusión que aunque se puede llegar a una relación muy próxima, nunca será exacta, es decir, el número decimal formado al tratar de relacionar estas dos magnitudes no tiene un fin.

$$\pi = \frac{P}{D} = 3{,}14159265\ldots$$

Siguiendo con el texto de los pitagóricos, Lo que encontraron estos, es que muchos triángulos rectángulos no se les podía encontrar la relación entre los catetos y la hipotenusa.

Al no encontrar ningunas relación, se terminó aceptando la idea que no siempre dos cosas se podían relacionar mediante números racionales, aunque según la historia esto fue un hecho catastrófico para dicha organización de filósofos y matemáticos griegos, quienes creían que dos magnitudes cualquiera siempre se podían relacionar.

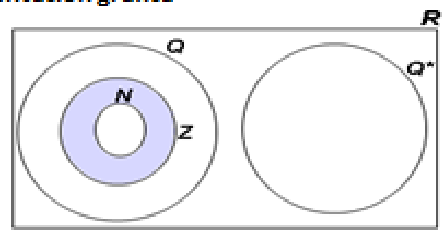
¿Pero entonces que son los números irracionales?

Precisamente los números irracionales (Q*) son aquellos números que no se pueden expresar como razón o fracción.

Entre los números que no se pueden expresar como fracciones está el conocido número π, el número Euler (e), y todos los números decimales infinitos no periódicos.

La unión de los racionales con los irracionales forman el conjunto de los números reales.

Representación grafica



Actividad

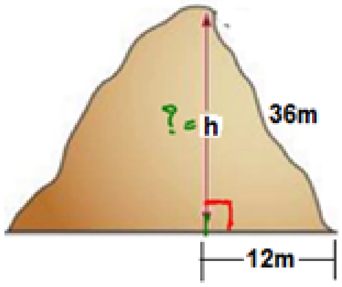
Completa la tabla colocando $\in$ cuando el número pertenezca al conjunto mostrado en las columnas y $\notin$ cuando no pertenece. En el caso de faltar el número en la primera columna debe colocar un número que cumpla las condiciones indicadas en la fila correspondiente.

	N	Z	Q	Q*	R
-12					
$\sqrt{9}$					
	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$
3/5					
$5\sqrt{7}$					
	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$
$1{,}4\overline{32}$					
	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$
3π					

Aplicaciones de los números irracionales

Ejemplo 1

Se quiere hallar la altura aproximada de la montaña que se muestra en el dibujo.



Solución

Como la altura forma un triángulo rectángulo, se puede utilizar el teorema de Pitágoras para determinar el lado faltante del triángulo.

En sí, el teorema de Pitágoras plantea que en cualquier triangulo rectángulo el lado grande al cuadrado (hipotenusa ^{2}) es igual a la suma de los lados pequeños o catetos, cada uno también al cuadrado.

$$Hipotenusa^2 = cateto1^2 + cateto2^2$$
$$36^2 = 12^2 + h^2$$
$$1296 = 144 + h^2$$
$$1296 - 144 = h^2$$
$$\sqrt{1152} = \sqrt{h^2}$$

Descomponiendo 1152 se obtiene

1152	2
576	2
288	2
144	2
72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$$\sqrt{2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 3^2 \times 2} = \sqrt{h^2}$$
$$2 \times 2 \times 2 \times 3\sqrt{2} = \sqrt{h^2}$$
$$24\sqrt{2} = h$$
$$33.94 \approx h$$

Esto es la montaña tiene aproximadamente 33.94 metros de altura.

Ejemplo 2

Un jardín tiene forma circular de 5 metros de radio. ¿Cuál es el área correspondiente al jardín?

Solución

El área de cualquier círculo es

$$A = \pi \cdot r^2$$

Para un radio de 5 metros el área será

$$A = \pi \cdot 5^2$$
$$A = 25\pi$$
$$A = 25 \times 3.1415\ldots$$
$$A = 78{,}5375\ldots m^2$$

Nota: aunque el número irracional π no es exacto y por tanto el área y el perímetro de un círculo tampoco lo son, para efectos de problemas matemáticos se trabaja como si el valor de π fuera 3,14.

Ejemplo 3

Organizar de menor a mayor los siguientes números

$$\pi \qquad \frac{8}{3} \qquad \sqrt{5}$$

Solución

Cuando hay raíces no exactas, es conveniente convertir todo a raíces, elevando cada número al cuadrado.

$$\sqrt{3{,}14^2} \qquad \sqrt{\frac{8^2}{3^2}} \qquad \sqrt{5}$$

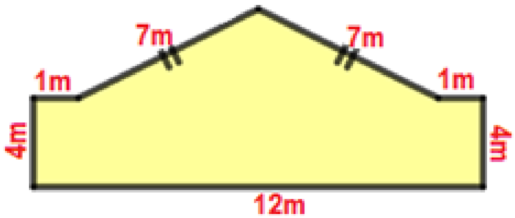
Luego los radicandos se expresan en decimales

$$\sqrt{9{,}86} \qquad \sqrt{7{,}11} \qquad \sqrt{5{,}0}$$

De lo que se deduce que estaban organizados en orden.

Ejemplo 3

Se requiere pintar el frente de una empresa, cuyo techo está construido de manera simétrica al punto medio.

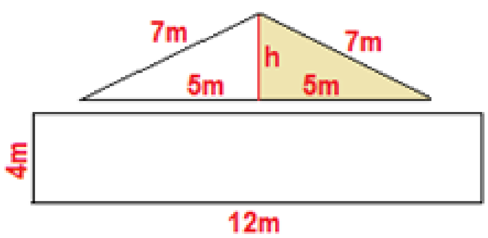


Si por cada m² se gasta 1,2 litros de pintura. ¿Cuánta pintura requiere para pintar este frente?

Solución.

Para saber cuánta pintura se gastará se deben conocer primero cuántos m² se van a pintar y luego sabiendo lo que se gasta en 1 m² se multiplica por la cantidad de m² que tiene que pintar.

El área del frente de la empresa se puede dividir en un rectángulo y en un triángulo como se muestra en la figura.



Para hallar el área de estas dos figuras se debe conocer la base y la altura de cada una, de lo cual solo faltaría la altura del triángulo del techo.

Al dividir el techo por la mitad, con la altura se forman dos triángulos rectángulo iguales. Utilizando uno de ellos por teorema de Pitágoras se obtiene.

$$7^2 = 5^2 + h^2$$
$$49 = 25 + h^2$$
$$49 - 25 = h^2$$
$$\sqrt{24} = \sqrt{h^2}$$
$$4{,}9 = h$$

El área del triángulo sería base por altura (10 x 4,9) dividido 2, cuyo resultado es 49 m².

El área del rectángulo sería base por altura (12 x 4), cuyo resultado es 48 m².

Luego el área total es (49m² + 48m²) 97 m²

Y por último la cantidad de litros de pintura requeridos para pintar este frente serían, lo que pinta por unidad cuadrada por el número de unidades cuadradas.

1,2 x 97 = 116,4 litros de pintura

Representación de datos estadísticos de una variable que se encuentra dividida en sub-variables.

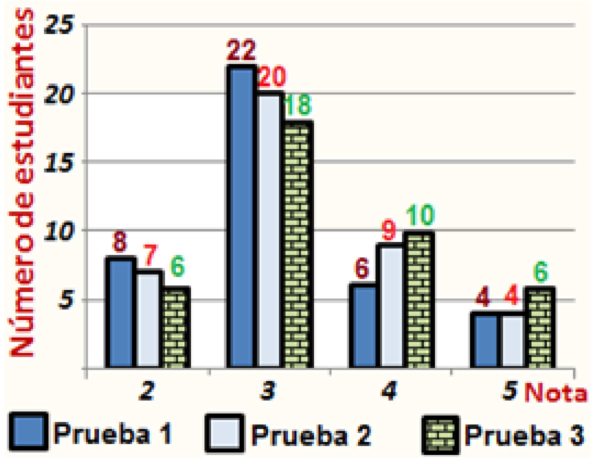
Estos casos se presentan cuando los posibles resultados de una variable se analizan con base a unas subdivisiones de la variable, por ejemplo cuando se habla de la variable estatura de un grupo, pero haciendo la diferenciación entre estatura de hombres y estatura de mujeres, o cuando se habla de la edad de un grupo, pero se subdivide esta variable en menores de 18, entre 18 y 40 y mayores de 40.

En los casos sencillos donde la variable no tiene ninguna subdivisión para cada categoría o posible resultado se asociaba una barra, pero cuando la variable tiene subdivisiones a cada categoría o posible resultado se le debe asociar una barra por cada subvariable.

De otro lado cuando se quiere representar una variable que se ha dividido en otras sub-variables, se puede hacer utilizando barras múltiples (varias barras por categoría) o barras apiladas (una encima de la otra).

Ejemplo 1

Durante un periodo el profesor de educación física realizó tres pruebas, las cuales calificó con las notas de dos a cinco, tal como se muestra en la gráfica.



Si se gana con una nota de 3 o más ¿Qué porcentaje de los estudiantes ganaron la segunda prueba?

Solución.

Como de un total de 40 estudiantes que presentaron la segunda prueba ganaron (20 + 9 + 4) 33 estudiantes, para hallar el porcentaje correspondiente esta cantidad se puede utilizar la regla de tres o utilizando el concepto de fracción. A continuación se presentarán dos posibles maneras de solucionarlo.

Por proporcionalidad

porcentaje	Estudiantes
100%	40 est.
x	33 est.

$$x = \frac{33 \times 100}{40}$$

Re*solviendo queda*

$x = 82{,}5\%$

Por ecuaciones

33 de 40 se escribe $\frac{33}{40}$

$\frac{33}{40}$ del total

$\frac{33}{40} \times 100\%$

82,5%

De lo que se deduce que 33 estudiantes corresponden a 82,5%

Nota: existen otras maneras gráficas de representar este mismo tipo de situaciones, los diagramas de barras apiladas, que consiste en colocar una barra encima de la otra en vez de colocarlas una al lado de la otra y las barras 100% apiladas, que consiste en colocar también las barras una encima de la otra pero expresando cada cantidad en porcentaje.

A continuación se presentaran los mismos datos representados en un diagrama de barras apiladas y en un diagrama de barras 100° apiladas, aunque estos dos tipos de gráficos no son tan usuales como los diagramas de barras múltiples.

Diagrame de barras apiladas

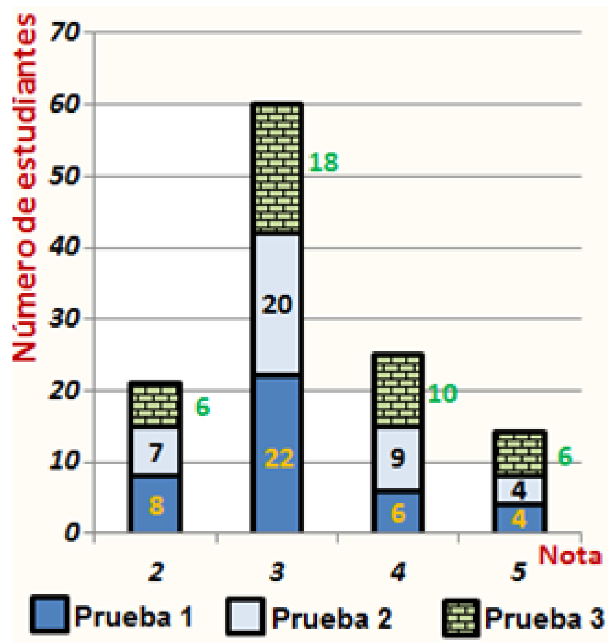


Diagrama de barras 100% apiladas