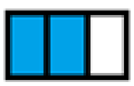
Marco teórico RAZ 6° Periodo 3

Marco teórico sobre fracciones

Definición: una fracción es una expresión de la forma a/b, con a y b perteneciente a los naturales y b diferente de cero, en donde **b** (denominador) representa el número de partes iguales en que se divide el todo, el cual puede ser una cantidad o un objeto y **a** (numerador) representa el número de partes que se toman de dicha división.

La fracción $\frac{2}{3}$ por ejemplo representa, que el todo o cantidad de referencia, se divide en tres partes y se toman dos de estas. Una posible representación gráfica sería la siguiente.



Es importante tener en cuenta que $\frac{2}{3}$ *es una abreviación de decir dos veces un tercio* $\left(2 \times \frac{1}{3}\right)$, *esto es,* $\frac{2}{3}$ *es lo mismo que* $2 \times \frac{1}{3}$

La expresión más larga es poco utilizada, ya que uno de los principios básico de las ciencias exactas, es dejar siempre la expresión más simple posible.

La fracción como una relación parte-todo

Para escoger una parte de una cantidad de referencia denominada "el todo", se utiliza generalmente el concepto de fracción, aunque en algunas situaciones también se puede utilizar los números decimales o el porcentaje, los cuales están estrechamente relacionados entre sí.

Cuando se aplica una fracción a una cantidad u objeto, el denominador indica en cuántas partes iguales se va a dividir este objeto o cantidad de referencia, y el ´numerador, cuántas partes de estas se van a tomar.

Ahora bien, después de hacer este proceso, es fundamental identificar que representa lo sombreado y lo no sombreado y determinar el valor de cada parte, pues a partir de este valor se pueden deducir fácilmente el resto.

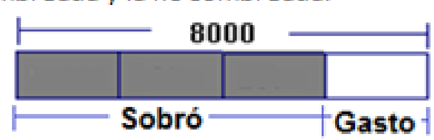
Ejemplo 1

David abrió su alcancía y tenía ahorrados un total de $8.000. Si después de comprar un juguete le quedaron tres cuartos del dinero que tenía. ¿Cuánto dinero costó el juguete?

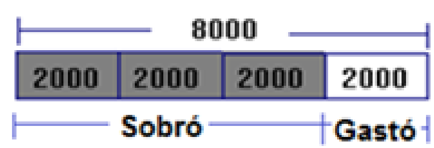
Solución método grafico

Para representar un problema con fracciones se debe identificar el todo o cantidad de referencia sobre la cual se va a aplicar la fracción, en este caso 8000.

Después, este todo se divide de acuerdo a lo indicado por la fracción, en este caso como es 3/4, se divide en 4 partes y se toman 3, indicando que representa la parte sombreada y la no sombreada.



Para hallar el valor de cada parte, simplemente se reparte el todo (8000) en las 4 partes en que se dividió la figura. Al dividir 8000 entre 4, el resultado obtenido es 2000 por cada parte. Tal como se muestra en la figura.



Finalmente sólo queda leer de la gráfica lo que pregunten. Como preguntan cuánto dinero gastó, serían entonces 2000 pesos.

Solución método matemático

Como le quedan tres cuartos del dinero que tenía que era 8000, para hallar tres cuartos de 8000, se multiplica la fracción por el número

$$\frac{3}{4} \text{ de } 8000 = \frac{3}{4} \times 8000 = \frac{24000}{4} = 6000$$

Como le quedan 6000 de 8000 que tenía, esto significa que se gastó 2000.

Suma o resta de fracciones homogéneas

Antes de explicar el proceso para sumar fracciones es importante tener en cuanta un principio básico de las matemáticas.

Solo se pueden sumar términos que sean semejantes entre sí. Si dos términos no son semejantes se deben convertir o expresar a términos semejantes, de lo contrario no se puede realizarse la operación.

Cuando decimos por ejemplo 2 horas 30 minutos, **no** se puede sumar (2 + 30) puesto que no estamos hablando de la misma unidad de medida, esto es, no son semejantes. Se tendría que convertir todo a horas o todo a minutos para poder sumarlos.

Aunque no es nuestro objetivo profundizar con términos algebraicos, es importante tener una idea clara de la suma de términos semejantes. Veamos algunos ejemplos.

- 5 manzanas + 3 manzanas = 8 manzanas
- 5 manzanas + 3 peras ...... no se pueden sumar
- 4x + 6x = 10x
- 2x + 8 .... no se pueden sumar
- $5x^2y + 3x^2y = 8x^2y$
- $3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$
- $3\sqrt{2} + 4\sqrt{5}$ .... no se pueden sumar
- $2\frac{1}{7} + 3\frac{1}{7} = 5\frac{1}{7}$

Obsérvese que si existen varios términos que tengan la misma expresión después del número inicial (términos semejantes), se suman normalmente los números y se coloca la misma expresión que los hace semejantes.

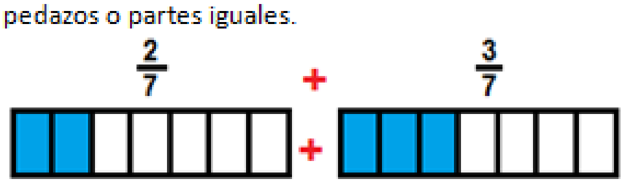
La idea a la que se quiere llegar con estos ejemplos, es que para sumar fracciones, se sigue este mismo principio.

Las partes que se sumen deben ser de igual tamaño y esto se cumple cuando los denominadores son los mismos.

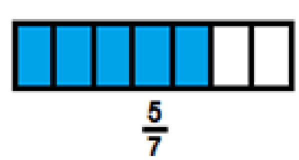
El tamaño de las partes lo determina siempre es el denominador, que indica en cuantas partes se va a dividir algo. Entre mayor sea el denominador, esto es, entre más sean las partes en que se va dividir algo, lo estas serán más pequeñas y entre más pequeño sea el denominador, las partes serán más grandes.

Suma de fracciones homogéneas por método gráfico

La idea es juntar todas las partes sombreadas en una sola figura o rectángulo, de no ser suficiente con un rectángulo se pueden graficar más rectángulos pero divididos siempre de la misma forma, para que queden pedazos o partes iguales.



Como son denominadores iguales, esto es pedazos de igual tamaño, se puede proceder a juntar en un sólo rectángulo de ser posible.



De lo que se concluye que $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$

Suma de fracciones homogéneas por método aritmético

Teniendo en cuenta que $\frac{2}{7}$ es la abreviación de $\left(2\times\frac{1}{7}\right)$ esto es, dos veces un séptimo y que $\frac{3}{7}$ es la abreviación de $\left(3\times\frac{1}{7}\right)$

Como se está hablando de séptimos, en ambos casos, quiere decir que las partes o pedazos son de igual tamaño, por lo que se puede proceder a sumar normalmente, como se sumaría cualquier grupo de términos semejantes.

$$2\times\frac{1}{7}+3\times\frac{1}{7}$$

$$5\times\frac{1}{7}$$

$$5\times\frac{1}{7}=\frac{5}{7}$$

En otras palabras, para sumar o restar fraccionarios homogéneos se suman o se restan los numeradores, según sea el caso, y se coloca el mismo denominador.

$$\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}$$

En otras palabras se puede decir que, tener el mismo denominador para varias fracciones, es lo mismo que tener todos los numeradores divididos por dicho número.

Suma, resta y comparación de fracciones heterogéneas.

Para sumar fracciones heterogéneas (con diferente denominador) lo que se hace es convertir dichas fracciones a homogéneas (partes de igual tamaño o de igual denominador), utilizando el proceso de amplificación de fracciones, con el fin de que las partes indicadas queden de igual tamaño para poder sumarlas, restarlas o hasta compararlas.

La idea es buscar un número que sea múltiplo de todos los denominadores, de tal forma que al amplificar cada fracción, el denominador de todas estas fracciones sea precisamente dicho número.

Aun que puede ser cualquier múltiplo común, se acostumbra por facilidad, el menor múltiplo de todos o mínimo común múltiplo.

Ejemplo 1

Juan pide una pizza a domicilio y se come 1/3 de pizza. Su hermana Karen por su parte, se come 2/5 de esta.

a. ¿Qué parte de la pizza se comieron entre ambos?

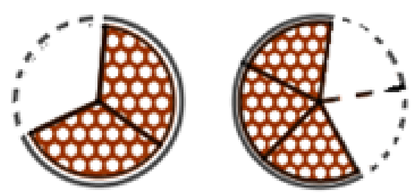
b. ¿Qué parte sobró?

c. ¿Quién comió más? ¿Cuánto demás?

Solución parte a

La pizza que se comieron entre ambos es la suma de los dos pedazos que se comieron individualmente. Como es complejo graficar la situación en un sólo gráfico, por ser fracciones heterogéneas, se utilizaran dos gráficos para mostrar la situación planteada.

$$\frac{1}{3}\quad+\quad\frac{2}{5}$$



Como los tercios y los quintos son pedazos de diferentes tamaños (denominadores diferentes) no se pueden sumar directamente, si no que se deben convertir antes a fracciones homogéneas.

Una de las formas de convertir a fracciones homogéneas (partes de igual tamaño), es escoger de los múltiplos del denominador mayor (5,10, 15, 20,…), el que sea múltiplo también de los otros. El 15 por ejemplo es múltiplo de todos.

Posteriormente se amplifica cada fracción, de tal forma que los denominadores de todas sea dicho múltiplo, en este caso 15.

El denominador 3 para que dé 15 se debe multiplicar por 5 y también el numerador para no alterar la fracción. Igualmente el 5 para que dé 15 se debe multiplicar por 3, tanto el denominador como el numerador, tal como se muestra a continuación.

$$\frac{1\times5}{3\times5} + \frac{2\times3}{5\times3}$$

Las nuevas fracciones homogéneas, equivalentes a las primeras, pero amplificadas, sería las siguientes.

$$\frac{5}{15} + \frac{6}{15}$$

Como los denominadores son iguales, significa que se están hablando de pedazos o partes iguales, lo cual indica que se pueden sumar o restar normalmente.

5 quinceavos más 6 quinceavos son 11 quinceavos.

$$\frac{5}{15}+\frac{6}{15}=\frac{5+6}{15}=\frac{11}{15}$$

En conclusión, entre Juan y Karen se comieron $\frac{11}{15}$ de la torta.

Obsérvese que entre mayor sea el denominador, se hace cada vez más complejo representar la situación gráficamente, por lo que se recomienda manejar el algoritmo matemático para evitar este tipo de problemas, aunque por cualquiera de los métodos utilizados da lo mismo.

Es importante aclarar también que existen otros métodos igualmente válidos, como es el conocido cotidianamente con el nombre de "método en cruz o de la carita feliz", todos ellos siguen implícitamente la idea de convertir todo a fracciones homogéneas o en su defecto a quedar todos divididos por un mismo número, que es equivalente.

Solución parte b

Como se comieron 11 partes de las 15 en que se dividió el todo, las otras cuatro partes restantes de las 15, sobraron.

Esto es, sobró $\frac{11}{15}$ de la torta .

Solución parte C

La parte de la pizza que comió cada uno, expresadas en fracciones homogéneas, según el proceso anterior es la siguiente.

Juan	Karen
$\frac{5}{15}$	$\frac{6}{15}$

De lo que se deduce que Karen comió más pizza que su hermano Juan. En sí comió un pedazo más que Juan de los 15, Por lo tanto comió 1/15 demás.

Utilizando la diferencia entre dos cantidades o resta, también se obtendría este mismo resultado, tal como se mostrará a continuación.

$$\frac{6}{15}-\frac{5}{15}=\frac{6-5}{15}=\frac{1}{15}$$

Ejemplo 2

Voy a la legumbrería y compro 1/2 kilo de yuca, 3 kilos de papas, 3/4 kilos de tomate y 1/5 kilo de Cebolla de huevo. ¿Cuánto pesan todos los productos que llevo?

Solución

El peso de estos productos se halla sumando todo.

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{1}+\frac{3}{4}+\frac{1}{5}$$

Como las fracciones son heterogéneas, se deben convertir a fracciones homogéneas.

Un número al que se puedan amplificar todos los denominadores (2, 1, 4 y 5)   es el 20.

Para convertir todos los denominadores a 20, se multiplica cada denominador por un número que de 20 y este mismo producto se coloca en el numerador, tal como se muestra a continuación.

$$\frac{1^{x10}}{2_{x10}}+\frac{3^{x20}}{1_{x20}}+\frac{3^{x5}}{4_{x5}}+\frac{1^{x4}}{5_{x4}}$$
$$\frac{10}{20}+\frac{60}{20}+\frac{15}{20}+\frac{4}{20}$$
$$\frac{89}{20}=4{,}45\,kilos$$

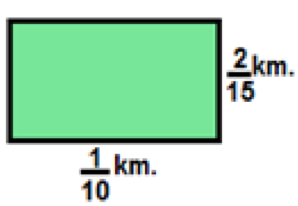
De donde se deduce que el peso total de todos los productos fue 4,4 kilos.

Ejemplo 3

Una finca   para ganado tiene forma rectangular, de 2/15 de kilómetro de ancho por 1/10 de kilómetro largo, se quiere cercar con tres cuerdas de alambre. ¿Qué alambre se necesitará?

Solución

Graficando la situación se tiene lo siguiente.



Para saber cuánto alambre se requiere, se debe saber cuánto alambre se lleva una vuelta y como son tres vueltas se suma en tres veces o se multiplica por tres.

Una vuelta o perímetro mide lo que suman todos sus lados, esto es:

$$\frac{1^{\times 3}}{10_{\times 3}}+\frac{2^{\times 2}}{15_{\times 2}}+\frac{1^{\times 3}}{10_{\times 3}}+\frac{2^{\times 2}}{15_{\times 2}}$$
$$\frac{3}{30}+\frac{4}{30}+\frac{3}{30}+\frac{4}{30}$$
$$\frac{14}{30}=\frac{7}{15}\,Km.$$

Como son 3 vueltas serían

$$\frac{7}{15}+\frac{7}{15}+\frac{7}{15}=\frac{21}{15}$$

Esto es 3 vueltas miden 21/15 de kilómetros (4,2 kilómetros).

Multiplicación de fracciones

Para multiplicar fracciones se multiplican numeradores entre sí y denominadores entre sí.

Ejemplo 1

Hallar los dos tercios de un medio

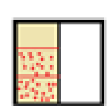
Solución método aritmético

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2\times 1}{3\times 2}=\frac{2}{6}$$

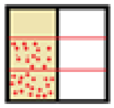
Solución método gráfico

Se grafica primero el último termino (1/2)

Luego a la parte sombreada se le sacan 2/3, esto es, los 2/3 de 1/2



Para hallar el resultado final, toda la figura debe quedar dividida en partes iguales, por tanto se completa el resto de pedazos de la misma forma.



De lo que se deduce que quedaron dos partes punteadas de un total de 6, esto es 2/6.

Ejemplo 2

Determinar el valor de 3 kilos y 1/4 de zanahoria. Si cada kilo cuesta 2500 pesos.

Solución

Los tres Kilos cuestan 3 x 2500 = 7500

El cuarto cuesta $\frac{1}{4}\times\frac{2500}{1}=\frac{2500}{4}=625$

En total serían: 7500 + 625 = 8125

División de fracciones

Para la división de fracciones, el resultado del numerador será precisamente numerador de la primera fracción pero multiplicado por el denominador de la segunda, y el valor del denominador será también el numerador de la primera fracción pero multiplicado por el numerador de la segunda.

Ejemplo 1

Hallar el resultado de la operación 1/3 dividido 2/5

$$\frac{1}{3}\div\frac{2}{5}=\frac{1\times 5}{3\times 2}=\frac{5}{6}$$

Otra forma de expresar la división de fracciones es colocando un cociente de fracciones, para lo cual se multiplicarían extremos y medios entre sí, como se muestra a continuación.

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{5}}=\frac{1\times 5}{3\times 2}=\frac{5}{6}$$

Ejemplo 2

Se quiere repartir 3/8 de pizza entre 2 personas ¿de a cuánto le toca a cada una?

Solución con procedimientos matemáticos

Para trabajar todo con fracciones se coloca siempre denominador 1 a los números enteros, esto es

$$\frac{3}{5}\div\frac{2}{1}$$

$$\frac{3\times 1}{5\times 2}$$

$$\frac{3}{10}$$

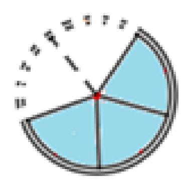
o también

$$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{1}}=\frac{3\times 1}{5\times 2}=\frac{3}{10}$$

A cada persona le corresponden 3/10 de pizza.

Solución método gráfico

Aunque la representación gráfica es un poco más compleja, repartir todos los tres quintos de una torta (parte sombreada) entre dos personas, es lo mismo que repartir cada pedazo de la parte sombreada en dos partes.



Como de cada pedazo le toca una parte al ser tres pedazos le corresponden tres de partes, de un total de 10 partes en que se podría dividir la torta entera, esto es 3/10 de torta.

Obsérvese que entre mayor sea el número más complejo se vuelve el tratar de representar dicha operación, por lo que es mejor utilizar el algoritmo o procedimiento de la división visto anteriormente.

ECUACIONES CON FRACCIONES

Para resolver situaciones problemas que involucren ecuaciones con fracciones, es importante identificar la incógnita y las operaciones que se van a realizar en función de dicha incógnita.

Es muy usual que en la formulación de una ecuación se tenga en cuenta el principio **"la suma de las partes debe ser igual al todo"** o su derivado **"si al todo le quito una parte queda el resto de las partes"**

Ejemplo 1

De la cantidad de dinero que tengo me gaste la mitad de este en una camiseta, 3000 en unas medias y me sobraron 7000.

a. Represente la situación anterior por medio de una ecuación si "x" es el dinero que tenía inicialmente.

b. Determinar cuánto dinero tenía inicialmente.

Solución parte a

Si tengo en cuenta que la suma de las partes es igual al todo, el todo en este caso sería lo que tenía inicialmente (x) y las partes: el costo de la camiseta (x/2), el costo de las medias (3000) y lo que le sobró (5000), por tanto se obtendría que

Camiseta + medias + sobrante = todo

$$\frac{1}{2}x + 3000 + 7000 = x$$

Otra posible forma de hallar la ecuación es teniendo en cuenta que al quitarle al todo una o más partes, queda el resto de las partes, esto es.

Todo − camiseta − medias = sobrante

$$x - \frac{1}{2}x - 3000 = 7000$$

Cualquiera de las dos ecuaciones son validadas e incluso pueden haber más maneras de representa lo mismo, pero al solucionarlas el resultado debe ser igual.

Solución parte b

Uno de los métodos que se pueden utilizar para resolver ecuaciones con fracciones, es convertir todo a fracciones homogéneas y luego trabajar sólo con los numeradores. A continuación se mostrará el proceso completo.

Inicialmente se colocará 1, a los términos que no tengan denominadores.

$$\frac{1}{2}x + \frac{3000}{1} + \frac{7000}{1} = \frac{x}{1}$$

Para convertir a fracciones homogéneas, el número al que se pueden amplificar todos los denominadores (múltiplo común) es el 2. Aunque también puede ser 4, 6, etc., por facilidad se trabaja con el menor (mínimo común múltiplo)

Al amplificar cada fracción para que los denominadores todos queden como 2, se obtiene lo siguiente

$$\frac{1^{\times 1}}{2_{\times 1}}x + \frac{3000^{\times 2}}{1_{\times 2}} + \frac{7000^{\times 2}}{1_{\times 2}} = \frac{x^{\times 2}}{1_{\times 2}}$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{6000}{2} + \frac{14000}{2} = \frac{2x}{2}$$

Para que estas expresiones con fracciones homogéneas sean iguales, como los denominadores son iguales se debe cumplir que los numeradores también deben ser iguales, esto es.

$$1x + 6000 + 14000 = 2x$$

Agrupando los términos semejantes que se puedan agrupar de cada lado, se obtiene lo siguiente.

$$1x + 20000 = 2x$$

Organizando términos semejantes a cada lado para poder operarlos luego, en este caso es más fácil organizar los términos con x a la derecha y los números sin letras a la izquierda, teniendo en cuenta que los que cambien de lado cambian de signo.

$$+20000 = 2x - 1x$$

$$20000 = x$$

Esto es, el dinero que tenía inicialmente era 20000.

Complemento de la solución parte b

Como ejercicio adicional se resolverá la segunda ecuación para verificar que da lo mismo.

$$\frac{x}{1}-\frac{1}{2}x-\frac{3000}{1}=\frac{7000}{1}$$

El mínimo común múltiplo de los denominadores es 2, al amplificar cada fracción para que todos los denominadores queden 2, se obtiene lo siguiente.

$$\frac{x^{\times 2}}{1_{\times 2}}-\frac{1^{\times 1}}{2_{\times 1}}x-\frac{3000^{\times 2}}{1_{\times 2}}=\frac{7000^{\times 2}}{1_{\times 2}}$$

En el paso anterior los números no son exponentes ni subíndices, son multiplicaciones normales, se colocaron pequeños para diferenciar estas operaciones.

$$\frac{2x}{2}-\frac{1}{2}x-\frac{6000}{2}=\frac{14000}{2}$$

$$2x-1x-6000=14000$$

$$1x-6000=14000$$

$$1x=14000+6000$$

$$x=20000$$

Ejemplo 2

El perímetro de un terreno rectangular es 28 metros. Si el ancho mide 3/4 del largo, ¿cuánto mide el largo?

Solución.

Como la incógnita es el largo, este valor se va llamar x

(Largo = x)

Ahora bien, como el ancho mide3/4 del largo, esto es

(Ancho = $\frac{3}{4}x$)

El perímetro de un terreno rectangular es la suma de todos sus lados, esto es, dos veces el largo más dos veces el ancho, por lo que se obtiene la siguiente ecuación.

Perímetro	=	**2 largo**	+	**2 ancho**
28	=	$2x$	+	$2\times\frac{3}{4}x$

$$28=2x+\frac{6}{4}x$$

Se deja como ejercicio resolver la ecuación.

NÚMERO MIXTO

Un número mixto está conformado por una parte entera y una parte fraccionaria.

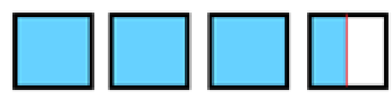
Para escribir por ejemplo, tres quesitos y medio se escriben la parte entera primero y luego la parte fraccionaria pero con números más pequeños, tal como se muestra a continuación.

$$3\,{}^{1}\!/\!_{2}$$

Los números mixtos también se pueden escribir como la suma de dos términos (el entero y el fraccionario), o como como fracción impropia (haciendo dicha suma o multiplicando la parte entera por el numerador más la suma del numerador, todo ello sobre el mismo denominador). Esto es, se puede escribir de tres formas.

$3\,{}^{1}\!/\!_{2}$ Es lo mismo que $3+\frac{1}{2}$ o que $\frac{7}{2}$

La representación gráfica sería la siguiente



Para resolver problemas con operaciones entre fracciones, usualmente se utiliza las dos últimas formas, pero principalmente la última.

Ejemplo 1:

Cuánto cuestan los tres quesitos y medio a 2000 pesos el quesito.

Solución

El costo es el valor unitario por la cantidad de unidades

$$2000 \times \frac{7}{2}=\frac{2000\times 7}{1\times 2}=\frac{14000}{2}=7000$$

Esto es tres quesitos y medio, o lo que es lo mismo 7/2 quesitos, cuestan 7000 pesos.